ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ: ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ: ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΜΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΤΟΜΕΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χαμιλτονιανά Συστήματα και Διατήρηση Ενέργειας: Θεωρητική ανάλυση και Αριθμητικές προσεγγίσεις

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Ιωάννης Ψαρόπουλος, Α.Ε.Μ.: 1845

Επιβλέπων Καθηγητής: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος, Ε.ΔΙ.Π. ,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
του Δ.Π.Θ.

Ξάνθη, 2025

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ: ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ: ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΜΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΤΟΜΕΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ:

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Χαμιλτονιανά Συστήματα και Διατήρηση Ενέργειας: Θεωρητική ανάλυση και Αριθμητικές προσεγγίσεις

Ιωάννης Ψαρόπουλος, Α.Ε.Μ.: 1845

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Εργασία Ειδίκευσης υποβλήθηκε στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης για την απόκτηση του τίτλου μεταπτυχιακών σπουδών ειδίκευσης στις Επιστήμες των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Επιβλέπων Καθηγητής: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος, Ε.ΔΙ.Π. , Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Δ.Π.Θ.

2ο Μέλος: Χρήστος Σχοινάς, Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Δ.Π.Θ.

3ο Μέλος: Γαρύφαλλος Παπασχοινόπουλος, Καθηγητής, Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος, Δ.Π.Θ.

Ξάνθη, 2025

DEMOCRITUS UNIVERSITY OF THRACE

SCHOOL OF ENGINEERING

DEPARTMENT: CIVIL ENGINEERING DEPARTMENT: OF ELECTRICAL AND COMPUTER

ENGINEERING

DEPARTMENT: ENVIROMENTAL ENGINEERING

SECTOR: MATHEMATICS, PROGRAMMING AND GENERAL COURSES

INTERDERTMENTAL POSTGRADUATE COURSE:

APPLIED MATHEMATICS

MASTER DISSERTATION

Hamiltonian Systems and Conservation of Energy: Theoretical analysis and Numerical approaches

Ioannis Psaropoulos, Registration Number: 1845

A thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master in Applied Mathematics, Department of Civil Engineering, Democritus University of Thrace.

COMMITTEE OF EXAMINERS

Supervisor: Epameinondas Diamantopoulos, Laboratory Teaching Staff, Department of Electrical and Computer Engineering, D.U.TH.

Member 2: C. J. Schinas, Professor, Department of Electrical and Computer Engineering, D.U.TH.

Member 3: G. Papaschinopoulos, Professor, Department of Environmental Engineering, D.U.TH.

Xanthi, 2025

ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΤΗΝ ΤΗΡΗΣΗ ΤΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΑΡΧΩΝ ΔΕΟΝΤΟΛΟΓΙΑΣ

Η παρούσα εργασία με τίτλο «Χαμιλτονιανά Συστήματα και Διατήρηση Ενέργειας: Θεωρητική ανάλυση και Αριθμητικές προσεγγίσεις» είναι πρωτότυπη και πραγματοποιήθηκε από τον φοιτητή Ιωάννη Ψαρόπουλο του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών με Αρ. Μητρώου ΑΕΜ 1845, υπό την επίβλεψη του Δρ. Επαμεινώνδα Διαμαντόπουλου. Η συγγραφή της εργασίας πραγματοποιήθηκε εξολοκλήρου από τον φοιτητή Ιωάννη Ψαρόπουλο, υπό την καθοδήγηση και τις υποδείξεις του επιβλέποντά του.

Βεβαιώνεται ότι, κατά την εκπόνηση και τη συγγραφή της εργασίας του, ο φοιτητής τήρησε τα προβλεπόμενα από τον νόμο και τον αντίστοιχο εσωτερικό κανονισμό του Τμήματος, σεβάστηκε πλήρως τις Αρχές της Ακαδημαϊκής Ηθικής και του Κώδικα Δεοντολογίας, οι οποίες απαγορεύουν την παραποίηση των ερευνητικών/πειραματικών αποτελεσμάτων, την αναφορά ψευδών στοιχείων, την κατάχρηση της διανοητικής ιδιοκτησίας τρίτων και τη λογοκλοπή και ότι έγινε με σεβασμό στις αρχές.

Περίληψη

Μια κατηγορία δυναμικών συστημάτων είναι τα Χαμιλτονιανά συστήματα, όπως και τα παράγωγα συστήματα ή συστήματα δυναμικού. Αυτά σχετίζονται με την δυναμική της κίνησης των κλασικών συστημάτων που προέρχονται από τον δεύτερο νόμο του Newton. Στα Χαμιλτονιανά συστήματα, εμφανίζονται χαρακτηριστικά, όπως νόμοι διατηρήσεως, συμπλεκτική δομή, αγκύλες Poisson κ.α. με τα οποία μπορούμε να μελετήσουμε αυτά τα συστήματα πιο αναλυτικά.

Η μελέτη των γραμμικών συστημάτων δυο διαστάσεων επεκτείνεται στα μη γραμμικά συστήματα. Εστιάζουμε στην εύρεση και ταξινόμηση των κρίσιμων σημείων και ορίζουμε τα υπερβολικά και μη υπερβολικά κρίσιμα σημεία.

Ένα χαρακτηριστικό των αυτόνομων δυναμικών συστημάτων είναι η εμφάνιση συγκεκριμένου είδους τροχιών, οι οποίες έχουν την μορφή κλειστής καμπύλης, που ονομάζεται οριακός κύκλος και παριστάνει μια περιοδική λύση του συστήματος. Οι οριακοί κύκλοι μπορούν να εμφανιστούν σε συστήματα οποιασδήποτε τάξεως και αποτελούν μια τυπική μορφή ταλάντωσης.

Λέξεις - κλειδιά:

1. Χαμιλτονιανά Συστήματα
2. Μη γραμμικά συστήματα
3. Αριθμητικές προσεγγίσεις
4. Κρίσιμα σημεία
5. Οριακοί κύκλοι

Abstract

A class of dynamical systems are Hamiltonian systems, as well as derived systems or potential systems. These are related to the dynamics of motion of classical systems derived from Newton's second law. In Hamiltonian systems, features such as conservation laws, complex structure, Poisson brackets, etc. appear with which we can study these systems more analytically.

The study of linear systems in two dimensions is extended to nonlinear systems. We focus on finding and classifying critical points and define hyperbolic and non-hyperbolic critical points.

A characteristic of autonomous dynamical systems is the appearance of a specific type of orbit, which has the form of a closed curve, called a limit cycle and represents a periodic solution of the system. Limit cycles can appear in systems of any order and are a typical form of oscillation.

Keywords:

1. Hamiltonian Systems
2. Nonlinear systems
3. Numerical approaches
4. Critical points
5. Limit cycles

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Επαμεινώνδα Διαμαντόπουλο για τη βοήθειά του στη δομή και τη μορφή αυτής της εργασίας.
Επίσης τους καθηγητές των υποχρεωτικών μαθημάτων και των επιλογών, για την ανάλυση σε βάθος και επεξήγηση, όλων των θεμάτων που μελετήθηκαν.
Τέλος τους συμφοιτητές μου για την παροχή σημειώσεων κατά τη διάρκεια των μαθημάτων.

"[Το σύμπαν] δεν μπορεί να διαβαστεί μέχρι να μάθουμε τη γλώσσα και να εξοικειωθούμε με τους χαρακτήρες με τους οποίους είναι γραμμένο. Είναι γραμμένο σε μαθηματική γλώσσα και τα γράμματα είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τα οποία είναι ανθρώπινα αδύνατο να κατανοήσουμε μια λέξη." - Γαλιλαίος Γαλιλέι

Πρόλογος

Στην εργασία γίνεται μια αναφορά στα Χαμιλτονιανά και μη γραμμικά συστήματα.

Στο πρώτο κεφάλαιο υπάρχουν ιστορικά στοιχεία και σύντομες βιογραφίες επιστημόνων που ασχολήθηκαν με τη θεωρητική μηχανική.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η βασική θεωρία των Χαμιλτονιανών και Νευτώνειων συστημάτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο υπάρχει η διατύπωση του θεωρήματος Liouville και του θεωρήματος Noether.

Στο τέταρτο κεφάλαιο ακολουθεί η αριθμητική ολοκλήρωση και τα μη γραμμικά συστήματα.

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται η αριθμητική προσέγγιση με κώδικα.

Πίνακας Περιεχομένων (σελ.)

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή 10

1. Ιστορικά στοιχεία 10

Κεφάλαιο 2. Θεωρητικό υπόβαθρο 12

(Χαμιλτονιανά, Νευτώνεια συστήματα)

2. Η Γεωμετρία των ροών 12

3. Ιακωβιανός πίνακας 12

4. Ολοκληρωτικές καμπύλες 13

5. Είδος ιδιομορφίας 14

6. Χαμιλτονιανά Συστήματα στο Επίπεδο 14

7. Νευτώνεια Συστήματα 24

8. Χαμιλτονιανά συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας 31

9. Συστήματα Δυναμικού (Παράγωγα Συστήματα) 32

10. Συνάρτηση Lyapunov 35

Κεφάλαιο 3. Θεώρημα Liouville - Θεώρημα Noether 38

11. Θεώρημα Liouville 38

12. Θεώρημα Noether 39

Κεφάλαιο 4. Αριθμητική ολοκλήρωση-Μη γραμμικά συστήματα 44

13. Συμπλεκτικός παράγοντας ολοκλήρωσης 44

14. Μέθοδος για διαχωρίσιμες Χαμιλτονιανές 44

15. Σύγκριση μεταξύ συμπλεκτικής και μη συμπλεκτικής ολοκλήρωσης πρώτης τάξης για τον αρμονικό ταλαντωτή 45

16. Μη γραμμικά συστήματα 47

17. Οριακοί κύκλοι 50

Κεφάλαιο 5. Αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης 55

18.Κώδικας προσομοίωσης (Python) 55

Βιβλιογραφία 58

Παράρτημα 59

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

1.Ιστορικά στοιχεία

Ο **Σερ Ισαάκ Νεύτων** (*Isaac Newton* 1643-1727) ήταν Άγγλος φυσικός, μαθηματικός, αστρονόμος, φιλόσοφος, αλχημιστής και θεολόγος. Θεωρείται πατέρας της Κλασικής Φυσικής, καθώς ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου αλλά και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης και τον περισπούδαστο «νόμο της βαρύτητας». Μεγάλης ιστορικής σημασίας υπήρξαν ακόμη κι οι μελέτες του σχετικά με τη φύση του φωτός καθώς επίσης και η καθοριστική συμβολή του στη θεμελίωση των σύγχρονων μαθηματικών και συγκεκριμένα του διαφορικού και απειροστικού λογισμού. Δεν είχε κοινοπολιτειακή υπηκοότητα, αλλά είχε αποκτήσει τον τίτλο του Εταίρου της Βασιλικής Εταιρείας, που δίνονταν σε πολίτες ή μόνιμους κατοίκους της Κοινοπολιτείας των Εθνών. Είχε διατελέσει πρόεδρος της Βασιλικής Εταιρίας.

Ο **Σερ Γουίλιαμ Ρόουαν Χάμιλτον** (*William Rowan Hamilton)*, Δουβλίνο, μεσάνυχτα 3ης προς 4η Αυγούστου 1805 – Δουβλίνο, 2 Σεπτεμβρίου 1865) ήταν Ιρλανδός φυσικός, αστρονόμος και μαθηματικός, ο οποίος έκανε σημαντικές συνεισφορές στην κλασική μηχανική, την οπτική και την άλγεβρα. Οι μελέτες του πάνω στα μηχανικά και οπτικά συστήματα οδήγησαν στο να ανακαλυφθούν νέες μαθηματικές έννοιες και τεχνικές. Η μεγαλύτερη συμβολή του είναι ίσως η αναδιατύπωση της Νευτώνειας μηχανικής, που σήμερα ονομάζεται Χαμιλτονιανή μηχανική. Η εργασία του αυτή έχει αποδειχθεί κεντρικής σημασίας για την σύγχρονη μελέτη των θεωριών των κλασικών πεδίων του όπως ηλεκτρομαγνητισμού, καθώς και για την ανάπτυξη της κβαντομηχανικής. Στα μαθηματικά, είναι ίσως πιο γνωστός ως ο εφευρέτης των «τετραδόνιων».

Ο **Πουασόν** (Siméon Denis Poisson) γεννήθηκε στο Πιτιβιέ (Pithiviers 1781) της Γαλλίας. Σπούδασε στο École Polytechnique, όπου αργότερα έγινε καθηγητής. Δίδαξε στο École Polytechnique και στο Bureau des Longitudes. Έγινε μέλος της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών και υπηρέτησε σε διάφορες κυβερνητικές θέσεις. Συνέβαλε σημαντικά σε πολλούς τομείς των μαθηματικών και της φυσικής, όπως οι ολοκληρωτικοί λογισμοί, η ηλεκτρομαγνητική θεωρία και η θεωρία πιθανοτήτων. Είναι ιδιαίτερα γνωστός για την κατανομή Πουασόν στην θεωρία πιθανοτήτων. Απεβίωσε στο Σο (Sceaux) το 1840.

Ο **Αλεξάντρ Μιχαηλόβιτς Λιάπουνοφ** (Aleksandr Mikhailovich Lyapunov) γεννήθηκε στην Γιαροσλάβλ (1857) της Ρωσίας. Ο πατέρας του, Μιχαήλ Βασίλιεβιτς Λιάπουνοφ, ήταν αστρονόμος. Ο αδελφός του, Σεργκέι Λιάπουνοφ, ήταν συνθέτης και πιανίστας. Αποφοίτησε από το Πανεπιστήμιο της Αγίας

Πετρούπολης το 1876, μελετώντας Φυσική και Μαθηματικά. Έγινε λέκτορας στο Πανεπιστήμιο του Χάρκοβο το 1895 και στη συνέχεια καθηγητής. Το 1901, μετά τον θάνατο του Τσεμπισέφ, έγινε επικεφαλής του τμήματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών στην Ακαδημία Επιστημών στην Αγία Πετρούπολη. Είναι περισσότερο γνωστός για το έργο του στη θεωρία της σταθερότητας συστημάτων, η οποία βασίζεται στην έννοια της σταθερότητας Λιάπουνοφ. Πέθανε στην Οδησσό στις 3 Νοεμβρίου 1918.

Ο **Balthasar van der Pol** (1889-1959) γεννήθηκε στην Ολλανδία και σπούδασε φυσική στην Ολλανδία και την Αγγλία. Απέκτησε διδακτορικό δίπλωμα από το Πανεπιστήμιο της Utrecht το 1920. Η κύρια συνεισφορά του ήταν στην κατανόηση των μη γραμμικών συστημάτων και των ταλαντώσεων. Ερεύνησε τα ηλεκτρικά κυκλώματα με ηλεκτρονικούς σωλήνες και παρατήρησε σταθερές ταλαντώσεις που ονομάστηκαν κύκλοι οριακού σημείου. Η πιο γνωστή συνεισφορά του είναι η μη γραμμική εξίσωση van der Pol, η οποία περιγράφει ταλαντώσεις χαλάρωσης και χρησιμοποιείται σε διάφορες εφαρμογές, όπως η μελέτη των καρδιακών ρυθμών και των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων.

Η **Έμι Νέτερ** (Amalie Emmy Noether, 23 Μαρτίου 1882 - 14 Απριλίου1935)ήταν πολύ σημαντική Γερμανίδα μαθηματικός γνωστή για τη μελέτη της στην αφηρημένη άλγεβρα και τη θεωρητική φυσική. Αναφέρεται από τους Πάβελ Αλεξανδρώφ, Άλμπερτ Αϊνστάιν, Ζαν Ντιεντονέ, Χέρμαν Βάυλ, Νόρμπερτ Βίνερ και άλλους ως η πιο σημαντική γυναίκα στην ιστορία των μαθηματικών που επέφερε ριζικές αλλαγές στις θεωρίες των δακτυλίων, των σωμάτων, και των αλγεβρικών δομών. Το θεώρημα της Νέτερ εξηγεί τη θεμελιώδη σχέση μεταξύ συμμετρίας και των νόμων διατήρησης.

Ο **Ζοζέφ Λουί Λαγκράνζ** (Joseph-Louis Lagrange ή Giuseppe Lodovico Lagrangia, 25 Ιανουαρίου 1736 – 10 Απριλίου 1813) ήταν Ιταλός μαθηματικός, φυσικός και αστρονόμος, που έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στην Πρωσία και τη Γαλλία. Έκανε πολύ σημαντικές μελέτες συνεισφέροντας σε όλα τα πεδία της μαθηματικής ανάλυσης, στη θεωρία αριθμών, αλλά και στην κλασσική μηχανική και ουράνια μηχανική.

Κεφάλαιο 2. Θεωρητικό υπόβαθρο

(Χαμιλτονιανά, Νευτώνεια συστήματα)

2. Η Γεωμετρία των ροών

Σε κάθε σημείο (t,x), του επιπέδου tx, όπου ορίζεται η συνάρτηση f(x) , το δεξιό μέλος της εξίσωσης $\dot{x}=f(x)$ ορίζει την παράγωγο dx/dt, η αριθμητική τιμή της οποίας ταυτίζεται με την κλίση του ευθυγράμμου τμήματος που περιέχει από αυτό το σημείο και εφάπτεται της λύσης που διέρχεται από αυτό το σημείο.

Η λύση $\varphi(t,x_0)$ ονομάζεται ροή, (flow), του προβλήματος αρχικής τιμής: $\dot{x}=f(x)$ με $x(t_0)=x_0$. Το σύνολο όλων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων ονομάζεται διευθύνον πεδίο, (directional field), της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης και τα ευθύγραμμα αυτά τμήματα διευθύνοντα στοιχεία.

Η γραφική παράσταση μιας λύσεως της εξίσωσης $\dot{x}=f(x)$ με $x(t_0)=x_0$, που διέρχεται από το σημείο x_0, ονομάζεται τροχιά, (trajectory). Σαν φασικό διάγραμμα ή φασικό πορτραίτο ή διάγραμμα φάσης, (phase portrait), μιας διαφορικής εξίσωσης θα ονομάζουμε το σύνολο των γραφικών παραστάσεων των λύσεων μαζί με το διευθύνον πεδίο.

Ένα σημείο $\bar{x} \in R$ ονομάζεται σημείο ισορροπίας ή κρίσιμο σημείο ή σταθερό σημείο, ή ιδιορρυθμία, (equilibrium point, critical point, steady state solution, fix point), της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x}=f(x)$ εάν ισχύει $f(\bar{x})=0$.

Θεώρημα 2.1. Έστω ότι η f είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\bar{x}$ ένα σημείο ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης $\dot{x}=f(x)$, δηλαδή, $f(\bar{x})=0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f'(\bar{x}) \neq 0$. Τότε το σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν $f'(\bar{x})<0$ και ασταθές εάν $f'(\bar{x})>0$.

3. Ιακωβιανός πίνακας

Σε πιο γενική μορφή, αντί για μια εξίσωση δυο μεταβλητών $F(x,y)=0$, έχουμε ένα σύστημα n εξισώσεων n+k μεταβλητών:

$$F_i=(y_{1,\ldots..}\, y_n,\, x_{1,\ldots\ldots\ldots}\, x_k)=0 \qquad i=1,2,\ldots\ldots n$$

Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί ως προς $y_{1,\ldots..}\ y_n$ συναρτήσει των $x_{1,\ldots\ldots\ldots}\ x_k$ εάν κάποιες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς και ο nxn Ιακωβιανός πίνακας:

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \ldots\ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} \ldots\ldots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \neq 0$$

4. Ολοκληρωτικές καμπύλες

Θεωρούμε το γραμμικό δισδιάστατο αυτόνομο σύστημα της μορφής:

$\frac{dx}{dt}= \dot{x} = a_{11}x+a_{12}y$
$\frac{dy}{dt}= \dot{y} = a_{21}x+a_{22}y$
όπου τα a_{ij} είναι σταθερές. Το σύστημα είναι γραμμικό αφού οι όροι ως προς x, y, $\dot{x}$ και $\dot{y}$ είναι όλοι γραμμικοί και αυτόνομο διότι τα δεξιά μέλη των εξισώσεων δεν περιέχουν την ανεξάρτητη μεταβλητή t. Το σύστημα μπορεί να γραφτεί και σε μορφή πίνακα: $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}$

Κάθε λύση του συστήματος, που διέρχεται από το σημείο $\mathbf{x_0}=(x_0,y_0\ )$ με $x_0=x(0),\ \ y_0=y(0)$, παριστάνει μια καμπύλη στο επίπεδο Oxy. Η λύση αυτή θα συμβολίζεται με: $\mathbf{x}(t)= \phi(t,\mathbf{x_0})=(x(t),y(t))$. Οι καμπύλες των λύσεων καλούνται τροχιές ή ολοκληρωτικές καμπύλες. Η απεικόνιση $\varphi: t\times\mathbf{x} \rightarrow \phi(t,\mathbf{x})$ ονομάζεται δυναμικό σύστημα, που ορίζεται από την παραπάνω εξίσωση .

Το διάγραμμα φάσης ή φασικό πορτραίτο είναι το σύνολο των λύσεων του συστήματος στον φασικό χώρο R^2. Λόγω της γραμμικότητας του συστήματος η θεωρία ύπαρξης και μοναδικότητας εγγυάται ότι οι τροχιές δεν τέμνονται. Υπάρχει ένας άπειρος αριθμός τροχιών που θα γέμιζαν το επίπεδο εάν σχεδιάζονταν όλες. Όμως η ποιοτική συμπεριφορά μπορεί να καθοριστεί με τη χάραξη μερικών από τις τροχιές, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε έναν κατάλληλο αριθμό αρχικών συνθηκών.

Το διευθύνον πεδίο δίνει τις κλίσεις $\frac{dy}{dx}$ και τα διανύσματα κατεύθυνσης των τροχιών στο διάγραμμα φάσης. Η κλίση των τροχιών μπορεί να καθοριστεί χρησιμοποιώντας τον αλυσιδωτό κανόνα

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{a_{11}x+a_{12}y}{a_{21}x+a_{22}y}$$

και η κατεύθυνση του διευθύνοντος πεδίου δίνεται από τα $\dot{x}$ και $\dot{y}$ σε κάθε σημείο του επιπέδου Oxy.

Οι καμπύλες, στα σημεία των οποίων η κλίση $\frac{dy}{dx}$ είναι σταθερή, καλούνται ισοκλινείς καμπύλες. Οι ισοκλινείς καμπύλες για τις οποίες $\dot{x}=0$ ή $\dot{y}=0$ χρησιμοποιούνται για να καθορίσουμε εάν οι τροχιές έχουν κατακόρυφες ή οριζόντιες εφαπτόμενες γραμμές, αντίστοιχα.

Ένα σημείο $\bar{x}=(x_0,y_0)$ ονομάζεται σημείο ισορροπίας ή κρίσιμο σημείο ή σταθερό σημείο, ή ιδιορρυθμία, του διαφορικού συστήματος , $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}$ εάν ισχύει $\mathbf{A}\bar{x}=\mathbf{0}$ δηλαδή όταν $\dot{x} = a_{11}x+a_{12}y =0$, $\dot{y} = a_{21}x+a_{22}y$.

5. Είδος ιδιομορφίας

Το προηγούμενο σύστημα μπορεί να γραφτεί σε μορφή πίνακα:

$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}$ με $\mathbf{x}=(x,y) \in R^2$, $\dot{\mathbf{x}}=(\dot{x},\dot{y})$ και $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ έτσι ο πίνακας Jordan θα είναι $J = P^{-1}AP$ όπου P ο κατάλληλος πίνακας. Εξετάζουμε το είδος της ιδιομορφίας στο (0,0), για τις ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2 \neq 0$:

α) για $\lambda_1,\lambda_2 \in R$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$, έχουμε κόμβο αν $\lambda_1\lambda_2>0$ και σαγματικό (υπερβολικό σημείο) αν $\lambda_1\lambda_2<0$ με $J=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

β) για $\lambda_1,\lambda_2 \in R$ και $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ έχουμε κόμβο ευσταθή αν $\lambda<0$ και ασταθή αν $\lambda>0$

με $J=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

γ) για $\lambda_1,\lambda_2 \in C$ και $\lambda_1=\overline{\lambda_2}=\beta+i\gamma$ έχουμε σπειροειδές σημείο ή εστία

με $J=\begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$

δ) για $\lambda_1,\lambda_2 \in C$ και $\beta=0, \gamma \neq 0$ έχουμε ελλειπτικό σημείο ή κέντρο

με $J=\begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$

6. Χαμιλτονιανά Συστήματα στο Επίπεδο

Η χαμιλτονιανή συνάρτηση είναι ο μετασχηματισμός Legendre της λαγκρανζιανής συνάρτησης. Η λαγκρανζιανή συνάρτηση είναι:

$L=\sum_{i=1}^{n} p_I \dot{q}_i - H$

με $L=L(q_1....q_n, \dot{q}_1 .....\dot{q}_n, t)$ και $H=H(q_1..... q_n, p_1.....p_n, t)$

Αν έχουμε τη Λαγκρανζιανή ενός συστήματος, μπορούμε να γνωρίζουμε τη δυναμική συμπεριφορά του, επιλύοντας τήν εξίσωση Euler - Lagrange .

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad i=1,2,...n$$

Οι 2n εξισώσεις

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Λέγονται εξισώσεις του Χάμιλτον η κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον και προσδιορίζουν την τροχιά του συστήματος στον 2n-διάστατο χώρο των φάσεων. Οι 2n εξισώσεις του Χάμιλτον, οι οποίες είναι πρώτης τάξης ως προς το χρόνο, είναι ισοδύναμες με τις n εξισώσεις Euler - Lagrange, οι οποίες είναι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο.

Ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων στο επίπεδο R^2 ονομάζεται Χαμιλτονιανό με ένα βαθμό ελευθερίας εάν μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y} \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Όπου H(x,y), είναι μια συνεχής διαφορίσιμη συνάρτηση ως προς x και y. Το σύστημα είναι συντηρητικό και δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας. Στις εφαρμογές, η Χαμιλτονιανή ορίζεται από την έκφραση: $H(x,y) = T(x,y) + V(x,y)$ όπου T είναι η κινητική ενέργεια και V η δυναμική.

Ένα σύστημα $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(x,y) \Leftrightarrow \dot{x} = P(x,y), \dot{y} = Q(x,y)$ για να είναι Χαμιλτονιανό πρέπει:

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad \{ \text{επειδή } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0 \ \}$$

Θεώρημα 6.1 (Διατήρηση της ενέργειας)

Η ολική ενέργεια H (x, y) αποτελεί ένα πρώτο ολοκλήρωμα και μια σταθερά της κίνησης E.

Είναι:

$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x}=0$

οπότε H = E επειδή $\frac{\partial H}{\partial t}=0$

Ένα κρίσιμο σημείο του συστήματος

$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F(x)}$, με $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$

στο οποίο ο Ιακωβιανός πίνακας έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές, λέγεται μη εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο, διαφορετικά λέγεται εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο.

Θεώρημα 6.2

Κάθε μη εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο ενός Χαμιλτονιανού συστήματος είναι τοπολογικά υπερβολικό ή ελλειπτικό σημείο.

Αν υποθέσουμε ότι το κρίσιμο σημείο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (0,0) (χωρίς βλάβη της γενικότητας) τότε ο Ιακωβιανός πίνακας είναι:

$$J_{(0,0)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y}\\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 H}{\partial x dy} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}\end{pmatrix} στο\ (0,0)$$

με $\text{tra}\ (J_{(0,0)})=\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}=0$

και $\det(J_{(0,0)})=-(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y})^2+\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$

Οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 ικανοποιούν την εξίσωση:

$\lambda^2 - \text{tra}(J_{(0,0)})\lambda + \det(J_{(0,0)}) = 0 \rightarrow$

$\lambda^2 + \det(J_{(0,0)}) = 0$ [είναι $\text{tra}(J_{(0,0)}) = 0$]

Αν $\det(J_{(0,0)}) < 0$, τότε το (0,0) είναι υπερβολικό σημείο επειδή έχουμε ετερόσημες ιδιοτιμές:

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-det(J_{(0,0)})}$

Ενώ αν $\det(J_{(0,0)}) > 0$, τότε το (0,0) είναι ελλειπτικό, αφού:

$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{det(J_{(0,0)})}$ (φανταστικές ιδιοτιμές)

Στη συνάρτηση Hamilton μπορεί να γίνει και μετασχηματισμός των συντεταγμένων από q→Q και από p→P. Θεωρώντας την απλή αρμονική ταλάντωση με:

$H=\frac{P^2}{2m}+\frac{kq^2}{2}$ και έστω

$q=\sqrt{\frac{4P}{m\omega}}\sigma\upsilon\nu Q, p=\sqrt{4m\omega P}\eta\mu Q, \left(\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 m=k\right)$

Οπότε:

$q^2=\frac{4P}{m\omega}\ \sigma\upsilon\nu^2 Q$ και $p^2=4m\omega P\eta\mu^2 Q$

Άρα:

$H=\frac{4m\omega P}{2m}\eta\mu^2 Q+\frac{k4P}{2m\omega}\ \sigma\upsilon\nu^2 Q \rightarrow$

$H=2\ \omega P\eta\mu^2 Q+2\frac{\omega^2 mP}{m\omega}\sigma\upsilon\nu^2 Q \rightarrow$

$H=2\omega P\eta\mu^2 Q+2\omega P\sigma\upsilon\nu^2 Q=2\omega P$

Οι κανονικές εξισώσεις γίνονται:

$\dot{Q}=\frac{\partial H}{\partial P}=2\omega, \dot{P}=-\frac{\partial H}{\partial Q}=0$

Παράδειγμα 6.1

Να βρεθεί η Χαμιλτονιανή του συστήματος:

$\dot{x}=\frac{y}{2}, \dot{y}=-2x+x^3$

και να γίνει το διάγραμμα φάσης.

Είναι: $\mathrm{P}(x,y)=\frac{y}{2}=\frac{\partial H}{\partial y}$ και $Q(x,y)=-2x+x^3=-\frac{\partial H}{\partial x}$

Έχουμε $\mathrm{div}F(x,y)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0+0=0$ άρα

υπάρχει η Χαμιλτονιανή.

Είναι: $\frac{y}{2}=\frac{\partial H}{\partial y} \Rightarrow \int dH=\int\left(\frac{y}{2}\right)dy \Rightarrow H=\frac{y^2}{4}+f(x)$

και $-2x+x^3=-\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \frac{df(x)}{dx}=2x-x^3 \Rightarrow$

$\int d\,f(x)=\int(2x-x^3)dx \Rightarrow f(x)=x^2-\frac{x^4}{4}$ οπότε

$\mathrm{H}(x,y)=\frac{y^2}{4}+x^2-\frac{x^4}{4}$

Ενώ οι ολοκληρωτικές καμπύλης δίνονται από τη σχέση $\mathrm{H}(x,y)=E$

Στην ίδια σχέση καταλήγουμε απαλείφοντας το χρόνο, από τις σχέσεις:

$\dot{x}=\frac{y}{2}$ *και* $\dot{y}=-2x+x^3$ *Φρα*

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2x+x^3}{\frac{y}{2}}$ $\Rightarrow$ $\int\frac{y}{2}dy=\int(-2x+x^3)dx \Rightarrow$

$\frac{y^2}{4}=-x^2+\frac{x^4}{4}+c \Rightarrow \frac{y^2}{4}+x^2-\frac{x^4}{4}=c$

Για τα κρίσιμα σημεία έχουμε:

$\dot{x}=0 \Rightarrow \frac{y}{2}=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow y=0$

$\dot{y}=0 \Rightarrow -2x+x^3=0 \Rightarrow x(-2+x^2)=0 \Rightarrow x=0,\pm\sqrt{2}$

Οπότε είναι το $A(0,0), B(\sqrt{2},0)$και $\Gamma(-\sqrt{2},0)$

Ο Ιακωβιανός πίνακας θα είναι:

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2+3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Για το Α(0,0) έχουμε:

$$J_A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$|\lambda I-J_A|=\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i$$

Οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές χωρίς πραγματικό μέρος, άρα το Α είναι ελλειπτικό σημείο (κέντρο.)

Για το σημείο $B(\sqrt{2},0)$ *έχουμε*:

$$J_B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \text{και}$$

$$|\lambda I-J_B|=\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -4 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{2}$$

Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές (θετική και αρνητική), άρα το Β είναι υπερβολικό σημείο (σαγματικό.)

Για το $\Gamma(-\sqrt{2},0)$ έχουμε:

$$J_\Gamma=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \text{και}$$

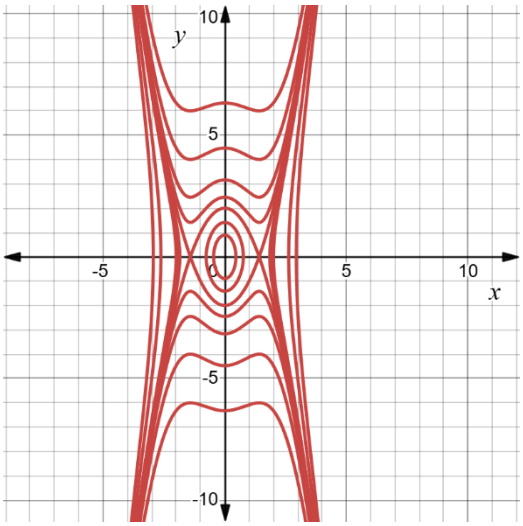
$$|\lambda I-J_\Gamma|=\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -4 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-2=0 \Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{2}$$

Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές (θετική και αρνητική), οπότε το Γ είναι υπερβολικό σημείο (σαγματικό).

Το διάγραμμα φάσης δείχνει τις τροχιές που προέρχονται από τη σχέση

$\frac{y^2}{4}+x^2-\frac{x^4}{4}=E$ για τις τιμές:

0, 0,2,0,5,1,1,5,2,5, $\pm 5, \pm 10$ του E

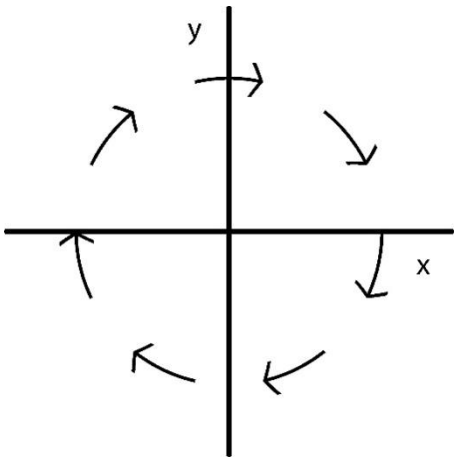


Σχήμα 6.1α

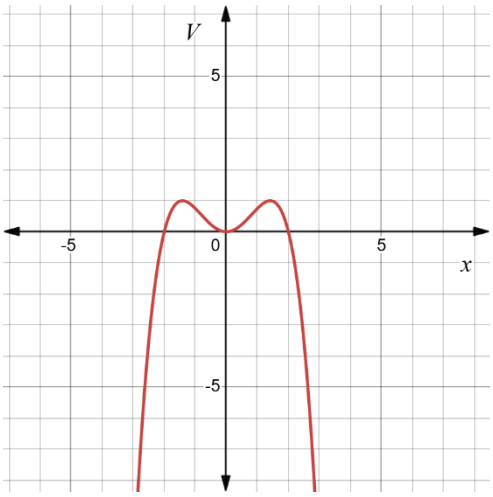
Για να βρούμε τη φορά της κίνησης πάνω σε κάποια τροχιά, υπολογίζουμε το $(\dot{x},\dot{y})$ σε ορισμένες περιοχές.

Στο θετικό ημιάξονα Oy είναι $\dot{x}=\frac{y}{2}>0$ και $\dot{y}=0$, οπότε έχουμε κίνηση προς τα δεξιά.

Στον αρνητικό ημιάξονα Oy εΩναι $\dot{x}=\frac{y}{2}<0$ και $\dot{y}=0$, οπότε έχουμε κίνηση προς τα αριστερά.



Το δυναμικό είναι:
$V(x)=x^2-\frac{x^4}{4}$ και τα σημεία ισορροπίας $(0,0), (\sqrt{2},1), (-\sqrt{2},1)$
υπολογίζονται από τη σχέση $\frac{dV}{dx}=2x-x^3=0 \Rightarrow x(2-x^2)=0 \Rightarrow x=0$ ή
$x=\pm\sqrt{2}$



Σχήμα 6.1β

Υπολογίζω και τη $\frac{d^2V}{dx^2}=2-3x^2$

Έτσι, για το $(0,0)$ είναι $2-3\cdot 0^2=2>0$

(τοπικό ελάχιστο) που αντιστοιχεί στο ελλειπτικό σημείο Α(0,0). Οι κλειστές τροχιές αντιστοιχούν σε μικρές ταλαντώσεις γύρω απ' αυτό το σημείο.

Για τα $(\sqrt{2},1)$ και $(-\sqrt{2},1)$ έχουμε $2-3\cdot(\pm\sqrt{2})^2=-2,24<0$

(τοπικά μέγιστα) που αντιστοιχούν στα υπερβολικά σημεία $B(\sqrt{2},0)$ και $\Gamma(-\sqrt{2},0)$.

Παράδειγμα 6.2

Να βρεθεί η Χαμιλτονιανή του συστήματος:
$\dot{x}=y+2xy, \dot{y}=-x-y^2+x^2$

και να γίνει το διάγραμμα φάσης.

Είναι $P(x,y)=y+2xy=\frac{\partial H}{\partial y}$ και

$Q(x,y)=-x-y^2+x^2=-\frac{\partial H}{\partial x}$

Έχουμε:

$\text{div}\, F(x,y)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=2y-2y=0$

άρα υπάρχει η Χαμιλτονιανή.

Είναι $\frac{\partial H}{\partial y}=y+2xy \Rightarrow \int dH=\int(y+2xy)dy \Rightarrow H=\frac{y^2}{2}+xy^2+f(x)$ και

$-\frac{\partial H}{\partial x}=-x-y^2+x^2 \Rightarrow y^2+\frac{\partial F_x}{\partial x}=x+y^2-x^2 \Rightarrow$

$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=x-x^2 \Rightarrow \int df\,(x)=\int(x-x^2)\,dx \Rightarrow$

$f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ άρα $H(x,y)=\frac{y^2}{2}+xy^2+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3} \Rightarrow$

$H(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+xy^2-\frac{x^3}{3}$.

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες δίνονται από τη σχέση: $H(x,y)=E$

Τα κρίσιμα σημεία θα είναι:

$y+2xy=0 \quad \Rightarrow \; y(1+2x)=0 \qquad \Rightarrow y=0 \text{ή} x=-\frac{1}{2}$
$-x-y^2+x^2=0 \Rightarrow \; -x-y^2+x^2=0$

Για $y=0$, $\quad -x-0^2+x^2=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ή} x=1$

άρα τα σημεία είναι Α(0,0), Β(1,0)
και για $x=-\frac{1}{2}$ $-\left(-\frac{1}{2}\right)-y^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=0 \quad \Rightarrow$

$\frac{1}{2}-y^2+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow \frac{3}{4}=y^2 \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

οπότε έχουμε και τα $\Gamma\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \Delta\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ο Ιακωβιανός πίνακας είναι:

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y & 1+2x \\ -1+2x & -2y \end{pmatrix}$$

Για το Α(0,0) είναι:

$J_A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ και

$$|\lambda I - J_A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i$$

Έχουμε μιγαδικές ιδιοτιμές χωρίς πραγματικό μέρος, άρα το Α είναι ελλειπτικό σημείο (κέντρο).

Για το Β(1,0) έχουμε:

$J_B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και

$$|\lambda I - J_B|=\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-3=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm \sqrt{3}$$

Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές (θετική και αρνητική) άρα το Β είναι υπερβολικό σημείο (σαγματικό).

Για το σημείο $\Gamma\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι

$J_\Gamma=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ -2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ και

$$|\lambda I - J_\Gamma|=\begin{vmatrix} \lambda-\sqrt{3} & 0 \\ 2 & \lambda+\sqrt{3} \end{vmatrix}=(\lambda-\sqrt{3})(\lambda+\sqrt{3})=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm \sqrt{3}$$

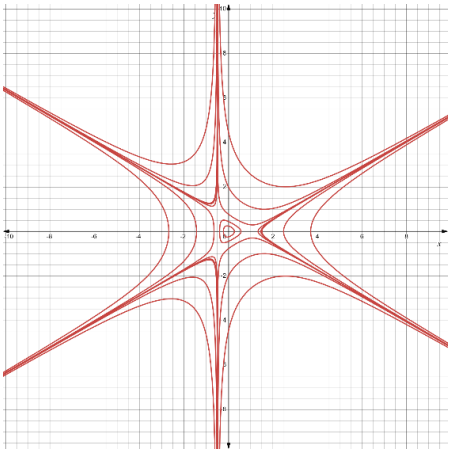
Έχουμε πραγματικές ιδιοτιμές (θετική και αρνητική) οπότε το Γ είναι υπερβολικό σημείο (σαγματικό).

Για το $\Delta\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *Χχουμε*:

$J_\Delta=\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ και

$$|\lambda I - J_\Delta|=\begin{vmatrix} \lambda+\sqrt{3} & 0 \\ 2 & \lambda-\sqrt{3} \end{vmatrix}=(\lambda+\sqrt{3})(\lambda-\sqrt{3})=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm \sqrt{3}$$

Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές (θετική και αρνητική) οπότε το Δ είναι υπερβολικό σημείο (σαγματικό).



Σχήμα 6.2

Στη σχέση H(x,y) = E, το E παίρνει τις τιμές:

{0, 0,03, 0,1, 0,3, ±2, ±10}

7. Νευτώνεια Συστήματα

Είναι τα συστήματα της Μηχανικής με ένα βαθμό ελευθερίας και αποτελούν ειδική μορφή Χαμιλτονιακών συστημάτων. Προέρχονται από τη διαφορική εξίσωση $\ddot{x}=f(x)$, που περιγράφει την κίνηση σώματος μοναδιαίας μάζας. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι η $f(x)$, άρα $m\ddot{x}=f(x) \Rightarrow \ddot{x}=f(x)$.

Αν θέσουμε $\dot{x}=y \Rightarrow \ddot{x}=\dot{y}$ *οπότε έχουμε το σύστημα* $\dot{x}=y$ *και* $\dot{y}=f(x)$,
ενώ *η ολική ενέργεια είναι* $H(x,y)=T(y)+V(x)$.

Η κινητική ενέργεια είναι: $T(y)=\frac{1}{2}y^2$ *και η δυναμική* $V(x)=-\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$.

Επίσης, είναι $f(x)=-\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ (από την προηγούμενη σχέση).

Θεώρημα 7.1. Τα κρίσιμα σημεία του συστήματος βρίσκονται στον άξονα $x'x$. Το $(x_0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο αν και μόνο αν είναι ρίζα της $f(x)$. Αν το $(x_0, 0)$ είναι τοπικό μέγιστο της $V(x)$, τότε είναι σαγματικό σημείο για το σύστημα. Αν το $(x_0, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της $V(x)$, τότε είναι ελλειπτικό σημείο για το σύστημα. Η εικόνα των τροχιών στο χώρο των φάσεων (x, y) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$.

Παράδειγμα 7.1

Για το εκκρεμές που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$\ddot{x}+2sinx=0$

να βρεθεί η Χαμιλτονιανή και να γίνει το διάγραμμα φάσεων.

Έχουμε το Νευτώνειο σύστημα:

$\dot{x}=y(\Rightarrow \ddot{x}=\dot{y})$

$\ddot{x}$=-$2sinx=\dot{y}$

οπότε $y = \frac{\partial H}{\partial y} \Rightarrow \int dH = \int ydy \Rightarrow H=\frac{y^2}{2}+f(x)$

με $T(y)=\frac{y^2}{2}$ και $f(x)=V(x)$

όπου $V(x)$=-$\int_0^x f(s)\,ds=\int_0^x 2\,sinsds$

$= [-2coss]_0^x$=-$2cosx$+2

Τελικά έχουμε $H(x,y)=\frac{y^2}{2}$-$2cosx$+2=E

Ενώ τα κρίσιμα σημεία είναι:

$y = 0 \qquad \Rightarrow y = 0$

-$2sinx$=0 $\Rightarrow x=k\pi, k=0, \pm1, \pm2, \ldots..$

$(0,0), (\pi, 0), (-\pi, 0), (2\pi, 0), (-2\pi, 0), \ldots\ldots$

Εδώ είχαμε: $P(x,y)=y, Q(x,y)$=-$2sinx$

και $\mathrm{div}F(x,y)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$=0+0=0, οπότε

υπάρχει η Χαμιλτονιανή.

Ο Ιακωβιανός πίνακας είναι:

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2cosx & 0 \end{pmatrix}$$

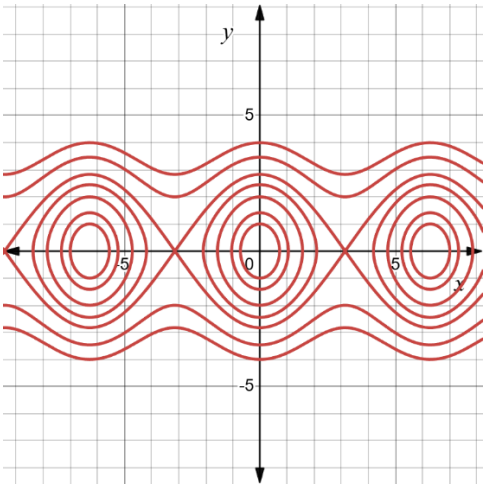
Για τις ιδιοτιμές έχουμε:

$$|\lambda I - J|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2cosx & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+2cosx=0 \Rightarrow \lambda^2=-2cosx$$

$$\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{2cosx}$$

Για τα κρίσιμα σημεία (0,0) (2π,0) (-2π,0) …… είναι $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{2}$ οπότε έχουμε ελλειπτικά σημεία (κέντρα). Οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές χωρίς πραγματικό μέρος.

Για τα κρίσιμα σημεία (π,0) $(-\pi,0)$ $(3\pi,0)$ $(-3\pi,0)$ …… είναι $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ άρα έχουμε υπερβολικά σημεία (σαγματικά). Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές (θετική και αρνητική).

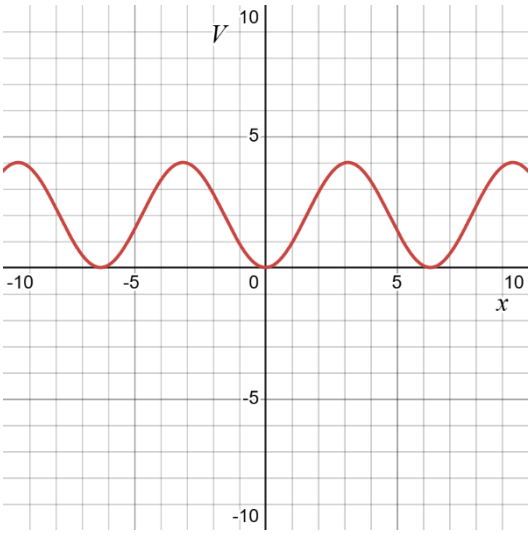


Σχήμα 7.1α

Για το Ε έχουμε τις τιμές:

{ 0,5 1, 2, 3, 4, 6, 8 }

Για το δυναμικό είναι: $V(x)$=-2$cosx$+2



Σχήμα 7.1β

Η αρχή (0,0) στο διάγραμμα φάσεων αντιστοιχεί σε ευσταθή θέση ισορροπίας του εκκρεμούς, όπως και στα κρίσιμα σημεία (2π,0),(−2π,0),(4π, 0), (−4π,0)... Το εκκρεμές βρίσκεται στην κάτω κατακόρυφη θέση.

Ενώ τα κρίσιμα σημεία (π,0), (−π,0), (3π,0), (−3π,0) ... αντιστοιχούν σε ασταθή θέση ισορροπίας. Το εκκρεμές βρίσκεται στην άνω κατακόρυφη θέση. Οι κλειστές τροχιές περιγράφουν περιοδικές κινήσεις.

Παράδειγμα 7.2

Να βρεθούν και να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία του συστήματος:

$$\dot{x}=y, \dot{y}=-\frac{\partial V(x)}{\partial x}, V(x)=-\frac{x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}$$

Έχουμε: $\dot{y}=-\frac{\partial V(x)}{\partial x}=-(-x^4-4x^2)=x^4-4x^2$

οπότε: $P(x,y)=y, Q(x,y)=x^4-4x^2$

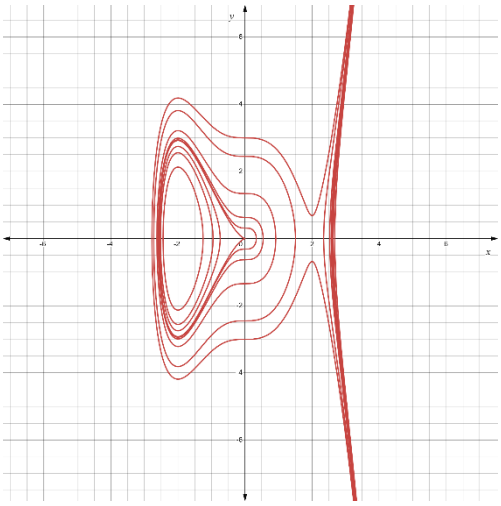
άρα: $\text{div}F(x,y)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0+0=0$ έτσι υπάρχει η Χαμιλτονιανή.

Είναι: $y=\frac{\partial H}{\partial y} \Rightarrow \int \partial H = \int y\, dy \Rightarrow H=\frac{y^2}{2}+f(x)$ όπου εδώ $f(x) = V(x)$, άρα:

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}-\frac{x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}=E$$

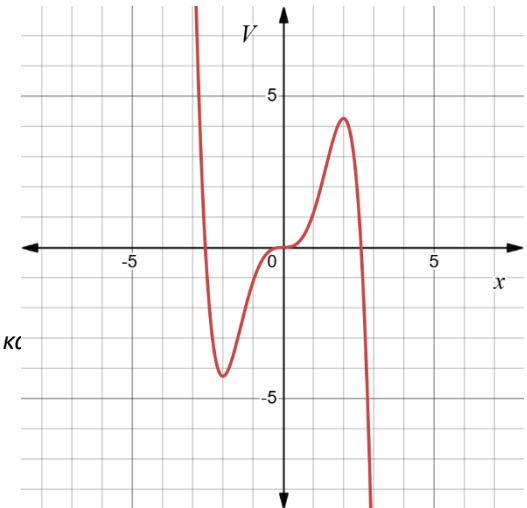
Το διάγραμμα φάσης για τις τιμές του Ε:

{-2,-1,-0.5, 0, 0,05, 0,2, 0,9, 3, 4,5}



Σχήμα 7.2α

Για το δυναμικό: $V(x)=-\frac{x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}$ είναι



Σχήμα 7.2β

Τα κρίσιμα σημεία είναι:
$\dot{x} = 0 \Rightarrow y = 0 \qquad \Rightarrow y = 0 \qquad \Rightarrow y = 0$
$\dot{y} = 0 \Rightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 2$ ή $x = -2$

Οπότε έχουμε τα σημεία Α(-2,0), Β(0,0) και Γ(2,0).

Ο Ιακωβιανός πίνακας είναι:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4x^3\text{-}8x & 0 \end{pmatrix}$$

Για το Α(−2,0) έχουμε:

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4(-8)\text{-}8(-2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \text{-}16 & 0 \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$|\lambda I - J_A| = \begin{vmatrix} \lambda & \text{-}1 \\ 16 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4i$$

Οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές χωρίς πραγματικό μέρος, οπότε το Α είναι ελλειπτικό σημείο (κέντρο).

Για το Β(0,0) είναι:

$J_B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ και

$|\lambda I - J_B|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=0$

Το Β είναι εκφυλισμένο σημείο.

Για το Γ(2,0) έχουμε:

$J_\Gamma=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4\cdot 2^3-8\cdot 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 16 & 0\end{pmatrix}$ και

$|\lambda I - J_\Gamma|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -16 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-16=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 4$

Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές (θετική και αρνητική) άρα το Γ είναι υπερβολικό σημείο (σαγματικό).

Από τη γραφική παράσταση της $V(x)$ φαίνεται ότι:

$V(-2)=-\frac{(-2)^5}{5}+\frac{4(-2)^3}{3}=6{,}4-10{,}67=-4{,}27$

Έχουμε τοπικό ελάχιστο στο Α, $V(0)=0$ οπότε υπάρχει σημείο καμπής στο Β

και $V(2)=-\frac{2^5}{5}+4\frac{2^3}{3}=-6{,}4+10{,}67=4{,}27$

άρα υπάρχει τοπικό μέγιστο στο Γ.

8. Χαμιλτονιανά συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας

Το σύνολο αυτών των συστημάτων δεν είναι εντελώς ολοκληρώσιμα και εκείνο που είναι σχηματίζουν ένα πολύ περιορισμένο αλλά σημαντικό υποσύνολο. Οι τροχιές αυτών των συστημάτων βρίσκονται σε χώρο 4 διαστάσεων αλλά η συνολική δομή μπορεί να κατανοηθεί δημιουργώντας απεικονίσεις Poincaré.

Ένα Χαμιλτονιανό σύστημα με 2 βαθμούς ελευθερίας ορίζεται από τις σχέσεις

$$\dot{p_1}=-\frac{\partial H}{\partial q_1},\ \dot{q_1}=\frac{\partial H}{\partial p_1},\ \dot{p_2}=-\frac{\partial H}{\partial q_2},\ \dot{q_2}=\frac{\partial H}{\partial p_2}$$

Το Η είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος με $H(p,q) = T(p,q) + V(p,q)$

Τ την κινητική ενέργεια, V τη δυναμική,

q τις γενικευμένες συντεταγμένες και p τις γενικευμένες ορμές.

Το Χαμιλτονιανό σύστημα που δίνεται από τις παραπάνω σχέσεις, είναι ολοκληρώσιμο αν υπάρχουν δύο ολοκληρώματα F_1 και F_2 τέτοια ώστε:

$[F_1, H]=0, [F_2, H]=0$ *και* $[F_1, F_2]=0$

Τα F_1, F_2 είναι συναρτησιακά ανεξάρτητα. Ενώ η αγκύλη Poisson [...]*για* δύο συναρτήσεις $f(q_i,p_i,t)$ και $g(q_i,p_i,t)$.

Θα είναι, σύμφωνα με τον ορισμό:

$$[f, g]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

Για ένα ολοκλήρωμα κίνησης $F_i(q_i, p_i)=c$, θα είναι $\frac{dF_i}{dt}=0$ οπότε:

$$\frac{\partial F_i}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial F_i}{\partial p_i}\dot{p}_i=0$$

Για δυο βαθμούς ελευθερίας, έχουμε:

$F_1(q_1,p_1)$, $F_2(q_2,p_2)$ και $H(q_1,q_2,p_1,p_2)$, άρα:

$$[F_1, H]=\frac{\partial F_1}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}-\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1}+\frac{\partial F_1}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}-\frac{\partial F_1}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2}=\frac{\partial F_1}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\dot{p}_1+0-0=0$$

όμοια είναι: $[F_2, H]=0$.

Για το $[F_1, F_2]$ είναι:

$$[F_1, F_2]=\frac{\partial F_1}{\partial q_1}\frac{\partial F_2}{\partial p_1}-\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\frac{\partial F_2}{\partial q_1}+\frac{\partial F_1}{\partial q_2}\frac{\partial F_2}{\partial p_2}-\frac{\partial F_1}{\partial p_2}\frac{\partial F_2}{\partial q_2}=0-0+0-0=0$$

9. Συστήματα Δυναμικού (Παράγωγα Συστήματα)

Θεωρούμε τη συνάρτηση *V(x,y)* και το σύστημα:

$$\dot{x}=-\frac{\partial V}{\partial x}, \dot{y}=-\frac{\partial V}{\partial y} \text{ ή } \dot{x}=-\text{grad}V(x)=-\nabla V(x, y), \text{με } \dot{x}=(\dot{x}, \dot{y})$$

Το σύστημα αυτό λέγεται παράγωγο ή σύστημα δυναμικού. Για τα κρίσιμα σημεία θα έχουμε: $\dot{x}=\dot{y}=0$,οπότε $\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=0$

Τα κρίσιμα σημεία της $V(x, y)$μπορεί να είναι τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα, ενώ το διάνυσμα $\nabla V(x, y)$ είναι κάθετο στις ισοσταθμικές καμπύλες $V(x, y)=c$.

Έτσι είναι:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\leq 0$$

και η κίνηση κατευθύνεται πάντα προς τα χαμηλότερα δυναμικά.

Παράδειγμα 9.1

Έστω η συνάρτηση:

$V(x,y)=x^2(x-3)^2+2y^2$ και το παράγωγο σύστημα

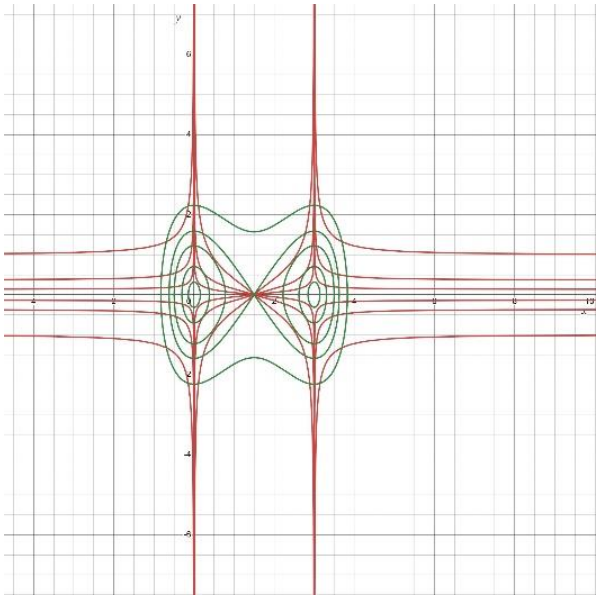
$$\dot{x}=-\frac{\partial V}{\partial x},\ \dot{y}=-\frac{\partial V}{\partial y}$$

Είναι: $V(x,y)=x^2(x^2+9-6x)+2y^2=x^4+9x^2-6x^3+2y^2$ άρα

$\dot{x}=-4x^3+18x-18x^2$ $και\dot{y}=-4y$

Για το V(x,y) παίρνω τις τιμές (πράσινο χρώμα):

{0,2, 1, 3, 5,0625, 10}



Σχήμα 9.1

Τα κρίσιμα σημεία είναι:

$\dot{x}=0 \Rightarrow -4x^3-18x+18x^2=0 \Rightarrow -x(4x^2+18-18x)=0$

$\dot{y}=0 \Rightarrow -4y=0 \qquad \Rightarrow -4y=0$

$x=0, \quad 4x^2-18x+18=0 \Rightarrow 2x^2-9x+9=0$

$y=0$

$x=0 \quad \Delta=81-4\cdot 2\cdot 9=9, x_{1,2}=\frac{9\pm 3}{4}= \qquad \frac{3}{2}$ 3

$y=0$

οπότε έχουμε το $A(0,0), B\left(\frac{3}{2},0\right)$ $και$ $\Gamma(3,0)$.

Επίσης $P(x,y)=-4x^3-18x+18x^2$ $και$ $Q(x,y)=-4y$, έτσι ο Ιακωβιανός πίνακας είναι:

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12x^2-18+36x & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Για το Α(0,0) έχουμε:

$J_A=\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $και$ $|\lambda I - J_A|=\begin{pmatrix} \lambda+18 & 0 \\ 0 & \lambda+4 \end{pmatrix}=$

$=(\lambda+18)(\lambda+4)=0 \Rightarrow \lambda_1=-18 και \lambda_2=-4$

Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και $\lambda_1\lambda_2>0$ άρα το Α είναι κόμβος (ευσταθής $\lambda_1,\lambda_2<0$).

Για το $B\left(\frac{3}{2},0\right)$ έχουμε:

$J_B=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $και$ $|\lambda I - J_B|\begin{pmatrix} \lambda-9 & 0 \\ 0 & \lambda+4 \end{pmatrix}=$

$(\lambda-9)(\lambda+4)=0 \Rightarrow \lambda_1=9 και \lambda_2=-4$

Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και $\lambda_1\lambda_2<0$ άρα το Β είναι υπερβολικό σημείο (σαγματικό).

Για το Γ(3,0) έχουμε:

$J_\Gamma=\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $και$ $|\lambda I - J_\Gamma|\begin{pmatrix} \lambda+18 & 0 \\ 0 & \lambda+4 \end{pmatrix}=$

$(\lambda+18)(\lambda+4)=0 \Rightarrow \lambda_1=-18 \kappa\alpha\iota \lambda_2=-4$

Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και $\lambda_1\lambda_2>0$ άρα το Γ είναι κόμβος (ευσταθής $\lambda_1,\lambda_2<0$).

Οι τροχιές του συστήματος θα είναι:

$\frac{dy}{dx}=\frac{-4y}{-4x^3+18x^2-18x}=\frac{-2y}{-2x^3+9x^2-9x} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{-2x^3+9x^2-9x}dx$ έχουμε

$-2x^3+9x^2-9x=x(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ και $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{\Gamma}{x-\frac{3}{2}}=\frac{1}{x(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)}$ οπότε

$$\begin{array}{l} A+B+\Gamma=0 \\ 3A+B+2\Gamma=0 \\ \frac{9}{2}A=1 \Rightarrow A=\frac{2}{9} \end{array} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{2}{9}+B+\Gamma=0 \\ \frac{2}{3}+B+0\Gamma=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} B=\frac{2}{9} \\ \Gamma=-\frac{4}{9} \end{array}\right|$$

Τελικά:

$-\frac{1}{2}\int\frac{1}{y}dy=\frac{2}{9}\int\frac{1}{x}dx+\frac{2}{9}\int\frac{1}{x-3}dx-\frac{4}{9}\int\frac{1}{x-\frac{3}{2}}dx \Rightarrow$

$-\frac{1}{2}ln|y|=\frac{2}{9}ln|x|+\frac{2}{9}ln|x-3|-\frac{4}{9}ln\left|x-\frac{3}{2}\right|+c \Rightarrow$

$-4.5ln|y|=2ln|x(x-3)|-4ln\left|x-\frac{3}{2}\right|+9c \Rightarrow$

$ln|y|^{-4.5}=ln\left(\frac{x^2(x-3)^2}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^4}\right)+k \Rightarrow$ (k=9c)

$$|y|^{-4.5}=e^k\frac{x^2(x-3)^2}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^4}$$

Παίρνω τιμές για: k, 0,4,5,9 (κόκκινο χρώμα)

10. Συνάρτηση Lyapunov

Μια συνάρτηση $V: R^n \to R$ λέγεται συνάρτηση Lyapunov, αν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος:

Θεώρημα 10.1

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο $A \leq R^n$ που περιέχει το σημείο ισορροπίας x_0 κάποιου συστήματος $\dot{x}=F(x), \quad F \in C^1(A)$ με $F(x_0)=0$. Επιπλέον, θεωρούμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση V∈C(A) και ισχύει $V(x_0)=0$, $V(x)>0$ για **x**∈A-$\{x_0\}$.

Τότε έχουμε:

α) Αν $\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in A$, το x_0 είναι ευσταθές.

β) Αν $\dot{V}(x)<0, \forall x \in A\text{-}x_0$, το x_0 είναι ασυμπτωτικώς ευσταθές, επειδή για τις τροχιές $x(t)$ έχουμε x (t)$\to x_0$ όταν t$\to\infty$.

γ) Αν $\dot{V}(x)>0, \quad \forall x \in A\text{-}x_0$, το x_0 είναι ασταθές.

Αν η $x(t)$ αποτελεί λύση του $\dot{x}=F(x)$ τότε $\frac{d}{dt}V\big(x(t)\big)=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}(t)+\frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}(t) \Rightarrow$

$\dot{V}(x)=F(x) \cdot \nabla V(x)=||F(x)||\ ||\nabla V(x)||cos\theta$

με θ τη γωνία ανάμεσα στο $F(x)$ και $\nabla V(x)$.

Παράδειγμα 10.1

Θεωρούμε την εξίσωση Van der Pol: $\ddot{x}\text{-}a(1\text{-}x^2)\dot{x}+x=0$ που είναι ισοδύναμη με το σύστημα: (θέτω $\dot{x}= y \Rightarrow \ddot{x}=\dot{y}$)

$\dot{y}\text{-}a(1\text{-}x^2)y+x=0 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}=a(1\text{-}x^2)y\text{-}x \ \ και \ \ \dot{x}=y$

(Αν α=0 παίρνουμε την εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή $\ddot{x}+ x=0$).

Θα μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση Lyapunov.

Για τα κρίσιμα σημεία είναι:

$\dot{x}=0 \ \Rightarrow y=0 \Rightarrow y=0$

$\dot{y}=0 \Rightarrow a(1\text{-}x^2)y\text{-}x=0 \ \Rightarrow x=0$

οπότε έχουμε το σημείο (0,0).

Επιλέγω την $V(x,y)=\alpha x^2+\beta y^2$ με α, β >0.

Άρα: $\dot{V}(x,y)=\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}=2\alpha xy+2\beta y[a(1-x^2)y-x]=$

$=2\alpha xy-2\beta xy+2\beta y^2 a(1-x^2)$

(Παίρνω α=β για να φύγουν οι όροι που θα μπορούσαν να δώσουν θετικές ή αρνητικές τιμές).

Έτσι έχουμε:

$\dot{V}(x,y)=2y^2\alpha^2(1-x^2)>0$ για $x \in (-1,1)$ $εκτός\ από\ το\ (0,0)$

οπότε έχουμε ασταθές σημείο.

Παράδειγμα 10.2

Να εξεταστεί το είδος του κρίσιμου σημείου στο (0, 0, 0) για το σύστημα.

$\dot{x}=-y^2x+2yz$

$\dot{y}=-2x^2y-xz$

$\dot{z}=-xy$

Επιλέγοντας τη $V(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

Έχουμε: $\dot{V}(x,y,z)=\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial V}{\partial z}\dot{z}=$

$=2x(-y^2x+2yz)+2y(-2x^2y-xz)+2z(-xy)=$

$=-2x^2y^2+4xyz-4y^2x^2-2xyz-2xyz=-6y^2x^2 \leq 0.$

Οπότε για κάθε (x,y,z) είναι $\dot{V}(x,y,z) \leq 0$, άρα έχουμε ευσταθές σημείο στο (0, 0, 0).

Κεφάλαιο 3. Θεώρημα Liouville - Θεώρημα Noether

11. Θεώρημα Liouville

Ο φασικός χώρος ενός συστήματος δημιουργείται από τις 2n συντεταγμένες $(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$, όπου κάθε σημείο του παριστάνει μια δυνατή κατάσταση του συστήματος. Το φασικό σημείο διαγράφει μια τροχιά που λέγεται φασική. Η ταχύτητα του φασικού σημείου δίνεται από τις εξισώσεις Hamilton:

$$\dot{q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, k=1,2,\dots,n$$

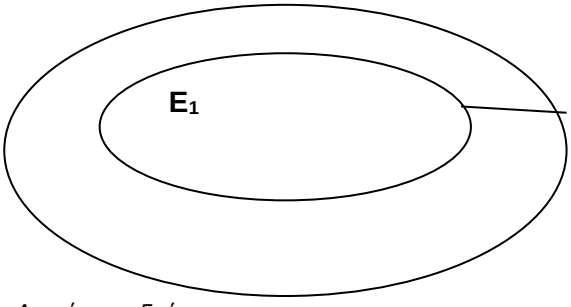
$$\dot{p_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, k=1,2,\dots,n$$

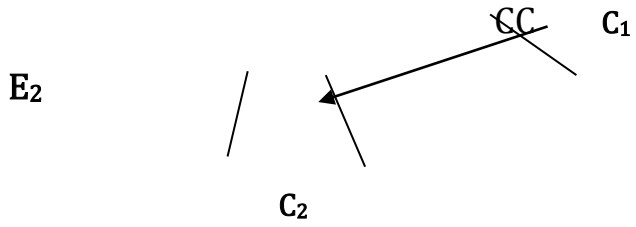
όπου q_k οι γενικευμένες συντεταγμένες και p_k οι γενικευμένες συζυγείς ορμές.

Οι φασικές τροχιές δεν τέμνονται μεταξύ τους, επειδή από κάθε φασικό σημείο διέρχεται μία τροχιά, η οποία αποτελεί μοναδική λύση των εξισώσεων Hamilton, για δεδομένες αρχικές συνθήκες.

Θεωρούμε μια μεγάλη συλλογή συντηρητικών συστημάτων που περιγράφονται από την ίδια Χαμιλτονιανή Η, η οποία είναι ίση με την ολική ενέργεια Ε και δεν μεταβάλλεται με το χρόνο: $H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)=E$

Ορίζεται έτσι μια ισοενεργειακή επιφάνεια στο χώρο των φάσεων. Εφόσον έχουμε μια μεγάλη συλλογή παρόμοιων συστημάτων, όπου το καθένα έχει ενέργεια Ε μεταξύ των τιμών $E_1 \le E \le E_2$, τότε οι τροχιές αυτών των συστημάτων βρίσκονται στο torus, που περικλείεται από τις υπερεπιφάνειες Η=E_1 και $H=E_2$.





Σχήμα 11

Αν τα αρχικά σημεία βρίσκονται στην περιοχή C_1, μετά από χρόνο t, θα βρίσκονται στην περιοχή C_2. Σύμφωνα με το θεώρημα Liouville, οι όγκοι των περιοχών C_1 *και* C_2 είναι ίσοι, συνεπώς ο όγκος στο χώρο των φάσεων παραμένει σταθερός.

Θεωρώντας ότι ο όγκος της συλλογής στο χώρο των φάσεων είναι V, με το στοιχειώδες όγκο $dV=(dq_1 \dots dq_n, dp_1 \dots dp_n)$ και την απόκλιση της ταχύτητας:

$$\nabla \cdot \overline{v}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \dot{q}_\iota}{\partial q_i}+\frac{\partial \dot{p}_\iota}{\partial p_i}\right)$$

Έτσι ο ρυθμός μεταβολής του V είναι:

$$\frac{dV}{dt}=\int_V \dots . \int \nabla \cdot \overline{v} dV = \int_V \dots . \int \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \dot{q}_\iota}{\partial q_i}+\frac{\partial \dot{p}_\iota}{\partial p_i}\right) dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n=$$

$$=\int_V \dots . \int \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}\right) dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n=0$$

Αφού έχουμε:

$$\dot{q}_\iota=\frac{\partial H}{\partial p_i} \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_\iota}{\partial q_i}=\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \text{ και } \dot{p}_\iota=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{\partial \dot{p}_\iota}{\partial p_i}=-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \text{ οπότε}$$

τελικά ο όγκος V στο χώρο των φάσεων παραμένει σταθερός.

12. Θεώρημα Noether

Έχουμε ένα φυσικό σύστημα που περιγράφεται από n γενικευμένες συντεταγμένες από $q_1, q_2, \dots, q_n$. Επιπλέον παίρνουμε n νέες συναρτήσεις $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ των αρχικών συντεταγμένων q_i και μια νέα παράμετρο ε, ώστε να ισχύει:

$Q_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n, \varepsilon) = q_\alpha$ αν $\varepsilon = 0$

Η ε αλλάζει με συνεχή τρόπο τις συντεταγμένες από q σε Q. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός λέγεται συμμετρία της Λαγκρανζιανής, όταν η Λαγκρανζιανή στις νέες συντεταγμένες δεν αλλάζει αριθμητικά στην πρώτη τάξη ως προς την ε, οπότε είναι:

$L(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + O(\varepsilon^2)$ με $Q = Q(q, \varepsilon)$ όπου τα q, Q είναι n-άδες συντεταγμένων.

Η αριθμητική τιμή της Λαγκρανζιανής απαιτούμε να είναι η ίδια όταν αναφέρεται σε συγκεκριμένη θέση και ταχύτητα του συστήματος σε καθορισμένη χρονική στιγμή, είτε έχουμε την $L(Q, \dot{Q}, t)$, είτε την $L(q, \dot{q}, t)$.

Θεωρούμε τώρα την οικογένεια απειροστών μετασχηματισμών:

$$Q_i(q, \varepsilon \approx 0) \approx Q_i(q, 0) + \varepsilon \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \equiv q_i + \varepsilon K_i(q)$$

Οι οποίοι προσεγγίζουν τον γενικό μετασχηματισμό $Qi(q, \varepsilon)$ όταν το ε είναι πολύ μικρό. Ο μετασχηματισμός προσδιορίζεται από τις συναρτήσεις $Ki(q)$ με $i = 1, 2, \dots, n$, οι οποίες ονομάζονται γεννήτορες του μετασχηματισμού.

Το Θεώρημα της Noether αναφέρει ότι αν η Λαγκρανζιανή κάποιου συστήματος είναι συμμετρική όταν γίνονται συνεχείς απειροστοί μετασχηματισμοί με γεννήτορες K_i, τότε το άθροισμα της ποσότητας: $\sum_{i=1}^{n} K_i p_i$ διατηρείται, όπου $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota}$

η γενικευμένη ορμή.

Απόδειξη:

Για τη Λαγκρανζιανή στις νέες συντεταγμένες, αφού $\dot{Q} = \dot{q} + \varepsilon \dot{K}$ (με ανάπτυξη ως προς ε) είναι:

$$L(Q, \dot{Q}, t) = L(q + \varepsilon K, \dot{q} + \varepsilon \dot{K}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota} \dot{K}_\iota \right) + O(\varepsilon^2)$$

Η ποσότητα στην παρένθεση πρέπει να είναι ίση με μηδέν, εφόσον η Λαγκρανζιανή είναι συμμετρική ως προς αυτούς τους μετασχηματισμούς.

Οπότε είναι: $\frac{\partial L}{\partial q_i} K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota} \dot{K}_\iota = 0$

Η $q_i(t)$ ως φυσική τροχιά ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler–Lagrange:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ έτσι είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota} \dot{K}_\iota = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota}\right) K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota} \frac{dK_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota} K_i\right) = \frac{d}{dt}(p_i K_i) = 0$$

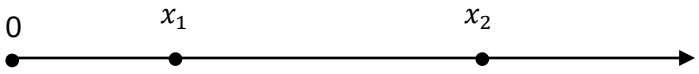
οπότε έχουμε διατήρηση της ποσότητας $p_i K_i$ (υπονοείται αθροιστική σύμβαση).

Παράδειγμα 12.1

Θεωρούμε δύο σωματίδια που κινούνται στην ίδια ευθεία και αλληλεπιδρούν με Νευτώνειο δυναμικό. Η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2 - V(x_2 - x_1)$$

όπου x_1, x_2 οι θέσεις των σωματιδίων ένα και δύο αντίστοιχα, με $x_2 > x_1 > 0$



Παίρνοντας έναν συνεχή μετασχηματισμό των συντεταγμένων:

$x_1 \to X_1(\varepsilon) = x_1 - \varepsilon$ και $x_2 \to X_2(\varepsilon) = x_2 - \varepsilon$

παρατηρούμε ότι αφήνει αναλλοίωτη τη Λαγκρανζιανή. Επειδή είναι:

$\dot{X}_1(\varepsilon) = \dot{x}_1$ και $\dot{X}_2(\varepsilon) = \dot{x}_2$, επίσης

$X_2(\varepsilon) - X_1(\varepsilon) = (x_2 - \varepsilon) - (x_1 - \varepsilon) = x_2 - x_1$

Οπότε έχουμε:

$$L_\varepsilon = \frac{1}{2} m_1 \dot{X}_1^{\,2}(\varepsilon) + \frac{1}{2} m_2 \dot{X}_2^{\,2}(\varepsilon) - V\big(X_2(\varepsilon) - X_1(\varepsilon)\big) =$$

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - V(x_2 - x_1) = L$$

Είναι: $\left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$ και

$$\left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\left[\frac{\partial L\varepsilon}{\partial X_1(\varepsilon)}\cdot\frac{\partial X_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial L\varepsilon}{\partial X_2(\varepsilon)}\cdot\frac{\partial X_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=$$

$$=-\left[\frac{\partial L\varepsilon}{\partial X_1(\varepsilon)}+\frac{\partial L\varepsilon}{\partial X_2(\varepsilon)}\right]_{\varepsilon=0}=-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}+\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)=0$$

Αν προσθέσουμε τις εξισώσεις Euler–Lagrange των σωματιδίων, έχουμε:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0$ και

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0$ άρα

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}+\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}+\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)=0 \Rightarrow$

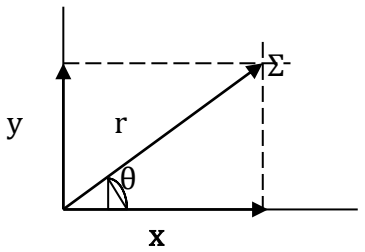
$\frac{d}{dt}(m_1\dot{x_1}+m_2\dot{x_2})=0 \Rightarrow\ p_1+p_2=$ σταθερή

(με $p_1=m_1\dot{x_1}$ και $p_2=m_2\dot{x_2}$)

Η Λαγκρανζιανή ήταν αναλλοίωτη στο μετασχηματισμό (μετάθεση) που χρησιμοποιήσαμε και αυτό είχε ως αποτέλεσμα τη διατήρηση της ολικής ορμής (p_1+p_2) του συστήματος των σωματιδίων.

Παράδειγμα 12.2

Θεωρούμε κάποιο σωματίδιο Σ που κινείται σ' ένα επίπεδο υπό την επίδραση κεντρικού πεδίου με δυναμικό $V(r)$.



Για την κινητική ενέργεια σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) έχουμε:

$x = r\sigma\upsilon\nu\theta, \quad y = r\eta\mu\theta$ οπότε:

$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial t}=\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\dot{r}\text{-}r\eta\mu\theta\cdot\dot{\theta}$ και

$\dot{y}=\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial t}=\eta\mu\theta\cdot\dot{r}+r\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\dot{\theta}$ οπότε

$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{m}{2}\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot\dot{r}^2+r^2\eta\mu^2\theta\cdot\dot{\theta}^2\text{-}2r\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta\dot{r}\dot{\theta}+\eta\mu^2\theta\cdot\dot{r}^2+r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot\right.$

$\left.\dot{\theta}^2+2r\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta\dot{r}\dot{\theta}\right)=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right).$

έτσι η Λαγκρανζιανή είναι:

$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)\text{-}V(r)$

Επιλέγω τον μετασχηματισμό: $\Theta(\varepsilon)=\theta+\varepsilon\ \kappa\alpha\iota\ \ R=r$ (ε, συνεχής παράμετρος)

Οπότε $L_\varepsilon=\frac{m}{2}\left(\dot{R}^2+R^2\dot{\Theta}_{(\varepsilon)}^2\right)\text{-}V(R)\ =\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)\text{-}V(r)=L$

(αφού $\dot{\Theta}_{(\varepsilon)}=\dot{\theta}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \dot{R}=\dot{r}$)

Η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε στροφές (δηλαδή είναι συμμετρική).

Συνθήκη για ύπαρξη διατηρούμενων ποσοτήτων:

$\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\ \ |_{\varepsilon=0}=\left[\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \Theta_{(\varepsilon)}}\cdot\frac{\partial \Theta_{(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial R}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=\left[\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \Theta_{(\varepsilon)}}\right]_{\varepsilon=0}=\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$

Από την εξίσωση Euler–Lagrange έχουμε:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)\text{-}\frac{\partial L}{\partial \theta}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=0\Rightarrow$

$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0$ οπότε η διατηρούμενη ποσότητα είναι η στροφορμή $\rho_\theta=mr^2\dot{\theta}$

(συζυγής ως προς τη γωνία θ).

Κεφάλαιο 4. Αριθμητική ολοκλήρωση-Μη γραμμικά συστήματα

13. Συμπλεκτικός παράγοντας ολοκλήρωσης

Ο συμπλεκτικός παράγοντας ολοκλήρωσης είναι ένα σύστημα αριθμητικής ολοκλήρωσης για Χαμιλτονιανά συστήματα. Έχει εφαρμογές στη μη γραμμική δυναμική, μοριακή δυναμική, μέθοδος διακριτών στοιχείων, φυσική επιταχυντών, φυσική πλάσματος, κβαντική φυσική και ουράνια μηχανική.

Έχει σχεδιαστεί για αριθμητική ολοκλήρωση των Χαμιλτονιανών εξισώσεων:

$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}$ και $\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$

όπου q είναι η συντεταγμένη της θέσης και p η συντεταγμένη της ορμής. Τα ζεύγη (q,p) ονομάζονται κανονικές συντεταγμένες.

14. Μέθοδος για διαχωρίσιμες Χαμιλτονιανές

Μια Χαμιλτονιανή είναι διαχωρίσιμη όταν μπορεί να γραφτεί ως

$H(p,q)=T(p)+V(q)$

όπου T είναι η κινητική ενέργεια και V η δυναμική.

Αν εισάγουμε το σύμβολο z = (q, p) που περιλαμβάνει τις κανονικές συντεταγμένες, τότε το ζεύγος των εξισώσεων Hamilton γράφεται ως:

$$\dot{z}=\{z,H(z)\} \text{ όπου } \{\dots\dots\} \textit{ είναι η αγκύλη Poisson.}$$

Ακόμη αν εισάγουμε τον τελεστή $D_H.=\{\cdot,H\}$ τότε η εξίσωση Χάμιλτον γίνεται

$D_H z=\dot{z}$

Οπότε η λύση δίνεται ως εκθετική συνάρτηση πινάκων:

$z(t)=exp(tD_H)z(0)$

15. Σύγκριση μεταξύ συμπλεκτικής και μη συμπλεκτικής ολοκλήρωσης πρώτης τάξης για τον αρμονικό ταλαντωτή

Θεωρούμε τον αρμονικό ταλαντωτή

$$H(p,q)=\frac{1}{2}(p^2+q^2)$$

Για τη μεταβολή του συστήματος με το χρόνο είναι:

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu t & \eta\mu t \\ -\eta\mu t & \sigma\upsilon\nu t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

Κάνουμε το ανάπτυγμα για το ημίτονο και το συνημίτονο

$$\eta\mu t = t - \frac{t^3}{3!} \ \ldots$$

$$\sigma\upsilon\nu t = 1 - \frac{t^2}{2!} \ \ldots$$

Παίρνοντας τους όρους πρώτης τάξης, υπολογίζουμε την αντίστοιχη προσέγγιση

$$\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q+tp \\ -qt+p \end{pmatrix} \Rightarrow q' = q+tp \ , \qquad p' = -qt+p$$

Μετά από ένα χρονικό βήμα η ενέργεια θα έχει αυξηθεί:

$$H' = \frac{1}{2}(p'^2+q'^2) = \frac{1}{2}((-qt+p)^2+(q+tp)^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(q^2t^2+p^2-2qpt+q^2+t^2p^2+2qtp) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(q^2(t^2+1)+p^2(t^2+1)\right) = \frac{1}{2}(t^2+1)(q^2+p^2) =$$

$$= H\cdot(t^2+1) \quad (\text{αφού } t^2+1>0)$$

Το (t^2+1) είναι η ορίζουσα του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ και δείχνει ότι αυξάνεται η περιοχή στο χώρο των φάσεων.

Μια συμπλεκτική μορφή είναι:

$$\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1-t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q+tp \\ -qt+(1-t^2)p \end{pmatrix}$$

Οπότε μετά από ένα χρονικό βήμα:

$$H' = \frac{1}{2}(p'^2+q'^2) = \frac{1}{2}([-qt+(1-t^2)p]^2+[q+tp]^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(q^2t^2+(1-t^2)^2p^2-2qtp(1-t^2)+q^2+t^2p^2+2qtp) =$$

$$= \frac{1}{2}(q^2t^2+p^2+p^2t^4-2t^2p^2-2qtp+2qpt^3+q^2+t^2p^2+2qtp) =$$

$$= \frac{1}{2}(q^2+p^2+t^2(q^2-p^2)+p^2t^4+2qpt^3)$$

Η ενέργεια δε διατηρείται. Αλλά εισάγοντας τα q', p' σ’ αυτή είναι:

$H_{\int} = \frac{1}{2}(p^2+q^2)+\frac{t}{2}qp$ *(ολοκληρωμένη)*

Η ολοκληρωμένη Χαμιλτονιανή (που διατηρείται) διαφέρει από την πραγματική Χαμιλτονιανή. Η παραπάνω Χαμιλτονιανή λέγεται «μετασχηματισμένη Χαμιλτονιανή». Έτσι:

$H_{\int} = H_{true}+H_{error}$

όπου η H_{true} είναι του αρμονικού ταλαντωτή και η διαφορά εξαρτάται από το χρονικό βήμα $H_{error} = \frac{t}{2}pq$.

Η ολοκληρωμένη Χαμιλτονιανή εξαρτάται από το χρονικό βήμα, που χρησιμοποιούμε.

16. Μη γραμμικά συστήματα

Θεώρημα 16.1 Έχουμε το διαφορικό σύστημα $\dot{x}=F(x), x \in R^n$ με $F \in C^1(E)$ και Ε ένα ανοιχτό υποσύνολο του R^n που περιέχει το σημείο **0**= (0, 0, …. 0). Θεωρούμε ακόμη ότι $F(0)=0$ και ότι ο Ιακωβιανός πίνακας έχει n ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος. Τότε σε μια μικρή περιοχή του **x=0**, υπάρχουν ευσταθείς W_s και ασταθείς $W_υ$ πολλαπλότητες, που έχουν ίδιες διαστάσεις n_s και $n_υ$ με τις ευσταθείς E_s και ασταθείς $E_υ$ πολλαπλότητες, του γραμμικοποιημένου συστήματος.

$$\dot{x}=Jx$$

με τις W_s και $W_υ$ να εφάπτονται των E_s και $E_υ$ στο **x=0.**

Αν ο J έχει ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος, τότε υπάρχει n κεντρική πολλαπλότητα, η οποία γενικά δεν είναι μοναδική.

Θεώρημα 16.2 (Κεντρική πολλαπλότητα)

Αν $F \in C^r(E), (r \geq 1)$ ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο τάξης r, όπου Ε είναι ανοιχτό υποσύνολο του R^n, που περιέχει το σημείο **0**. Θεωρούμε **ότι** $F(0)=0$ και ότι ο Ιακωβιανός πίνακας έχει n_s ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος , $n_υ$ ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος και

$n_c= n - n_s - n_υ$ φανταστικές ιδιοτιμές. Τότε υπάρχει μια κεντρική πολλαπλότητα W_c με διαστάσεις n_c και τάξη C^r, που είναι εφαπτόμενη στην κεντρική πολλαπλότητα E_c του γραμμικοποιημένου συστήματος.

(Οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων που είναι εφαπτόμενες στα ιδιοδιανύσματα θετικής και αρνητικής ιδιοτιμής, ονομάζονται αντίστοιχα ασταθής και ευσταθής πολλαπλότητα).

Παράδειγμα 16.1

Να καθοριστούν οι πολλαπλότητες του μη γραμμικού συστήματος:

$\dot{x}$=-2x
$\dot{y}$=-y^2
$\dot{z}$=3z

Το κρίσιμο σημείο είναι το Α (0,0,0) (όταν $\dot{x}$=0, $\dot{y}$=0, $\dot{z}$=0).

Έχουμε: $P(x,y,z)$=-2x

$Q(x,y,z)$=-y^2

$R(x,y,z)$=3z

Για κάθε διαφορική εξίσωση είναι:

$\frac{dx}{dt}$=-2x ⇒ $\int \frac{1}{x}dx = \int$ (-2)dt ⇒

lnx=-2t+c ⇒ x=e^{-2t+c}=ke^{-2t}

$\frac{dy}{dt}$=-y^2 ⇒ $\int \frac{1}{y^2}dy$ =-$\int dt$ ⇒

-$\frac{1}{y}$=-t+c ⇒ $\frac{1}{y}$=t-c ⇒

$y=\frac{1}{t\text{-}c}$

$\frac{dz}{dt}$=3z ⇒ $\int \frac{1}{z}dz = \int 3dt$ ⇒

lnz=3t+c ⇒ z=e^{3t+c}=me^{3t}

Για τη γενική μορφή του Ιακωβιανού πίνακα έχουμε:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2y & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Στο κρίσιμο σημείο είναι:

$$J_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Για τις ιδιοτιμές έχουμε:

$$| \lambda I - J_A | = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} =$$

$$=(\lambda+2) \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} =(\lambda+2)\lambda(\lambda-3)=0$$

Άρα $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$

Τα ιδιοδιανύσματα είναι: για $\lambda_1 = -2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$-2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$-5\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

$\alpha 0 = 0$, έστω $\alpha = 1$ άρα $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Για $\lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$-3\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

$0\beta = 0$ έστω $\beta = 1$ άρα $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Για $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$5\alpha = 0 \Rightarrow \alpha=0$

$3\beta = 0 \Rightarrow \beta=0$

$0\gamma = 0$ έστω $\gamma = 1$ άρα $v_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Οπότε n_s =1, n_v =1 $και$ n_c =n-n_s -n_v =3-1-1=1

(n=3, $αφού$ $είμαστε$ $σε$ $ανοιχτό$ $υποσύνολο$ $του$ R^3)

Για την εξίσωση τροχιάς έχουμε από τις $x=ke^{-2t}$ $καιz=me^{3t}$,

$e^{2t}=\frac{k}{x}$, $z=me^te^{2t}=me^t\frac{k}{x}\Rightarrow$ zx=kme^t

οπότε $x=\frac{A}{z}exp\left(\frac{1}{y}+c\right)$ $\left(με\ A=mk\ \ καιt=\frac{1}{y}+c\right)$

17. Οριακοί κύκλοι

Ένα μη γραμμικό σύστημα στο R^2:

$\dot{x}=P(x,y)$ $\dot{y}=Q(x,y)$

μπορεί να έχει έναν άλλου είδους «ελκυστή» ή «απώστη» της κίνησης. Δηλαδή μια κλειστή περιοδική τροχιά που λέγεται οριακός κύκλος. Η κλειστή τροχιά είναι μία ομαλή συνεχής καμπύλη, που είναι τοπολογικά ισοδύναμη με κύκλο, αν μπορεί να μετασχηματιστεί σε αυτόν ύστερα από ομαλούς (συνεχείς και παραγωγίσιμους) μετασχηματισμούς των μεταβλητών του συστήματος.

Παράδειγμα 17.1

Έχουμε τις εξισώσεις κίνησης:

$$\dot{x}=-y+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}[1-(x^2+y^2)]$$

$$\dot{y}=x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}[1-(x^2+y^2)]$$

Μετασχηματίζω σε πολικές συντεταγμένες:

$x=rcos\theta,\ y=rsin\theta$ και $r^2=x^2+y^2$ οπότε είναι:

$$\dot{x}=-rsin\theta+\frac{rcos\theta}{r}(1-r^2)=-rsin\theta+cos\theta-r^2cos\theta$$

$$\dot{y}=rcos\theta+\frac{rsin\theta}{r}(1-r^2)=rcos\theta+sin\theta-r^2sin\theta$$

$r^2=x^2+y^2 \Rightarrow 2rdr=2xdx+2ydy \Rightarrow$

$r\dot{r}=x\dot{x}+y\dot{y}=-r^2cos\theta sin\theta+rcos^2\theta-r^3cos^2\theta+r^2cos\theta sin\theta++rsin^2\theta-r^3sin^2\theta=+r-r^3 \Rightarrow r\dot{r}=r-r^3 \Rightarrow \dot{r}=1-r^2$ και

$$tan\theta=\frac{y}{x}\Rightarrow xtan\theta=y\Rightarrow dxtan\theta+x\frac{1}{cos^2\theta}d\theta=dy\Rightarrow$$

$$\dot{x}\frac{sin\theta}{cos\theta}+\frac{r}{cos\theta}\dot{\theta}=\dot{y}\Rightarrow \dot{x}sin\theta+r\dot{\theta}=cos\theta\dot{y}\Rightarrow$$

$$-rsin^2\theta+sin\theta cos\theta-r^2sin\theta cos\theta+r\dot{\theta}=rcos^2\theta+sin\theta cos\theta-r^2sin\theta cos\theta$$

$$\Rightarrow\ -r+r\dot{\theta}=0\Rightarrow\dot{\theta}=1$$

Έτσι έχουμε τις εξισώσεις:

$$\frac{dr}{dt}=1-r^2 \text{ και} \frac{d\theta}{dt}=1$$

Άρα:

$\int \frac{1}{1-r^2} dr = \int dt \Rightarrow \frac{1}{2} ln \left|\frac{1+r}{1-r}\right| = t+c \Rightarrow$

$ln \left|\frac{1+r}{1-r}\right| = 2t+2c \Rightarrow e^{2t+2c} = \frac{1+r}{1-r} \Rightarrow$

$Ae^{2t} = \frac{1+r}{1-r} \Rightarrow Ae^{2t} - Ae^{2t} r = 1+r \Rightarrow$

$Ae^{2t} - 1 = (Ae^{2t}+1)r \Rightarrow r = \frac{Ae^{2t}-1}{Ae^{2t}+1}$

Όπου $e^{2c} = A$ *και* $1-r^2 > 0 \Rightarrow 1 > r > 0$

(έγινε χρήση της σχέσης

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{a+x}{a-x}\right|$ για $a=1$ και $x=r$)

Επίσης $\int d\theta = \int dt \Rightarrow \theta = t+\theta_0 \Rightarrow t = \theta - \theta_0$

Για $t=0$ οι αρχικές συνθήκες είναι (r_0, θ_0)

οπότε $r_0 = \frac{A-1}{A+1} \Rightarrow r_0 A + r_0 = A - 1 \Rightarrow$

$A(r_0 - 1) = -r_0 - 1 \Rightarrow A = \frac{r_0+1}{1-r_0}$ και

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Ae^{2t}-1}{Ae^{2t}+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{A - \frac{1}{e^{2t}}}{A + \frac{1}{e^{2t}}} = 1$$

Έτσι μετά από πολύ μεγάλο χρόνο (t→∞) οι τροχιές τείνουν σ' έναν ευσταθή οριακό κύκλο ακτίνας $r=1$.

Η εξίσωση τροχιάς είναι: $r = \frac{Ae^{2(\theta-\theta_0)}-1}{Ae^{2(\theta-\theta_0)}+1}$

Παράδειγμα 17.2

Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων κίνησης:

$\dot{x}=y+x(x^2+y^2\text{-}1)$ και $\dot{y}=\text{-}x+y(x^2+y^2\text{-}1)$

Σε πολική μορφή θα έχουμε:

$\left(x=rcos\theta, y=rsin\theta \; και \; r^2=x^2+y^2, \; tan\theta=\frac{y}{x}\right)$

$\dot{x}=rsin\theta+rcos\theta(r^2\text{-}1)$

$\dot{y}=\text{-}rcos\theta+rsin\theta(r^2\text{-}1)$

$r\dot{r}=x\dot{x}+y\dot{y}=r^2sin\theta cos\theta+r^2cos^2\theta(r^2\text{-}1)$

$\text{-}r^2sin\theta cos\theta+r^2sin^2\theta(r^2\text{-}1)=r^2(r^2\text{-}1) \Rightarrow \; \dot{r}=r(r^2\text{-}1)$ και

$\dot{x}sin\theta+r\dot{\theta}=\dot{y}cos\theta \Rightarrow rsin^2\theta+rsin\theta cos\theta(r^2\text{-}1)+r\dot{\theta}=$

$=\text{-}rcos^2\theta+rsin\theta cos\theta(r^2\text{-}1) \Rightarrow r+r\dot{\theta}=0 \Rightarrow \; \dot{\theta}=\text{-}1$

Έτσι έχουμε τις εξισώσεις:

$\frac{dr}{dt}=r(r^2\text{-}1)$και$\frac{d\theta}{dt}=\text{-}1$

Άρα

$\int \frac{1}{r(r^2\text{-}1)}dr=\int dt$ οπότε

$$\frac{1}{r(r^2\text{-}1)}=\frac{A}{r}+\frac{B}{r\text{-}1}+\frac{\Gamma}{r+1}==\frac{A(r^2\text{-}1)+Br(r+1)+\Gamma r(r\text{-}1)}{r(r^2\text{-}1)}=$$

$$=\frac{Ar^2\text{-}A+Br^2+Br+\Gamma r^2\text{-}\Gamma r}{r(r^2\text{-}1)}=\frac{(A+B+\Gamma)r^2+(B\text{-}\Gamma)r\text{-}A}{r(r^2\text{-}1)}$$

είναι:

$\text{-}A=1 \Rightarrow A=\text{-}1$

$B\text{-}\Gamma=0 \Rightarrow B=\Gamma \Rightarrow \Gamma=\frac{1}{2}$

$A+B+\Gamma=0 \Rightarrow \text{-}1+B+B=0 \Rightarrow B=\frac{1}{2}$

$$\int \frac{\text{-}1}{r}dr+\frac{1}{2}\int \frac{1}{r\text{-}1}dr+\frac{1}{2}\int \frac{1}{r+1}dr=\int dt \; \Rightarrow$$

$-lnr+\frac{1}{2}ln(r-1)+\frac{1}{2}ln(r+1)=t+c \Rightarrow$

$ln\sqrt{(r-1)(r+1)}-lnr=t+c \Rightarrow$

$ln\sqrt{\frac{r^2-1}{r^2}}=t+c \Rightarrow ln\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}=t+c \Rightarrow$

$e^{t+c}=\sqrt{1-\frac{1}{r^2}} \Rightarrow e^{2(t+c)}=1-\frac{1}{r^2} \Rightarrow$

$\frac{1}{r^2}=1-Ke^{2t} \Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt{1-Ke^{2t}}}$ (με $K=e^{2c}$, $r^2-1>0 \Rightarrow r>1$)

Επίσης: $\frac{d\theta}{dt}=-1 \Rightarrow \int d\theta=-\int dt \Rightarrow \theta=-t+\theta_0 \Rightarrow t=\theta_0-\theta$

Υπολογισμός του K για $t=0$,

$r_0=\frac{1}{\sqrt{1-K}} \Rightarrow r_0^2=\frac{1}{1-K} \Rightarrow 1-K=\frac{1}{r_0^2} \Rightarrow$

$K=1-\frac{1}{r_0^2} \Rightarrow K=\frac{r_0^2-1}{r_0^2}$

Η εξίσωση τροχιάς είναι:

$$r=\frac{1}{\sqrt{1-Ke^{2(\theta_0-\theta)}}}$$

Υπάρχει ένας ασταθής οριακός κύκλος στον οποίο τείνουν οι τροχιές για $t \rightarrow -\infty$

Κεφάλαιο 5. Αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης

18. Κώδικας προσομοίωσης (Python)

Ο κώδικας προσομοιώνει την χρονική εξέλιξη ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή, υπολογίζοντας την κινητική και δυναμική ενέργεια σε κάθε βήμα χρόνου. Χρησιμοποιεί τρεις διαφορετικές αριθμητικές μεθόδους ολοκλήρωσης—RK4, Symplectic Euler και Stormer-Verlet—οι οποίες προσεγγίζουν την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων της κίνησης $\dot{q} = p/m$ $\dot{p} = -kq$. Για κάθε μέθοδο και κάθε επιλεγμένο βήμα χρόνου dt, υπολογίζεται η ενέργεια του συστήματος σε όλα τα βήματα μέχρι τον συνολικό χρόνο T και συγκρίνεται με την αρχική ενέργεια, ώστε να εκτιμηθεί το μέγιστο σχετικό σφάλμα ενέργειας. Τέλος, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με πίνακα και γράφημα για να συγκριθεί η ακρίβεια των μεθόδων σε συνάρτηση με το μέγεθος του βήματος χρόνου.

Ο κώδικας είναι ο εξής:

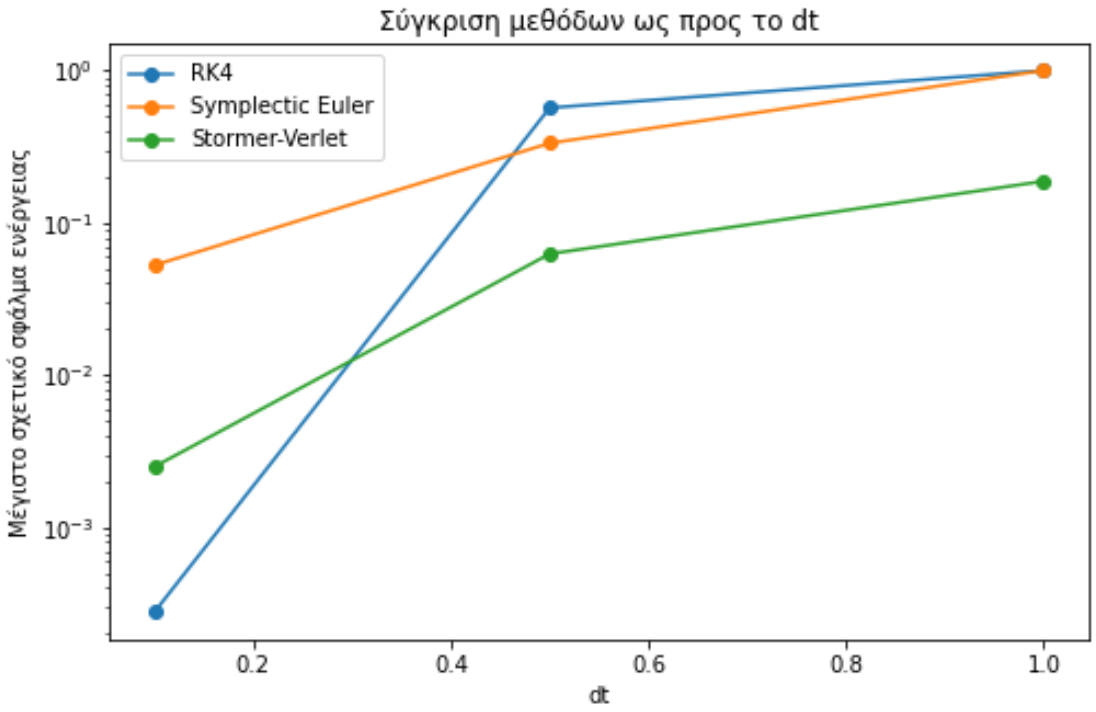
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# --- Παράμετροι συστήματος ---
m, k = 1.0, 1.0
T = 2000.0
q0, p0 = 1.0, 0.0

# --- Ενέργεια ---
def energy(q, p):
    return p**2 / (2*m) + 0.5 * k * q**2



# --- Μέθοδοι ολοκλήρωσης ---
def rk4_step(q, p, dt):
    def f(q, p):
        return p/m, -k*q
    dq1, dp1 = f(q, p)
    dq2, dp2 = f(q + 0.5*dt*dq1, p + 0.5*dt*dp1)
    dq3, dp3 = f(q + 0.5*dt*dq2, p + 0.5*dt*dp2)
    dq4, dp4 = f(q + dt*dq3, p + dt*dp3)
    q_new = q + dt*(dq1 + 2*dq2 + 2*dq3 + dq4)/6
    p_new = p + dt*(dp1 + 2*dp2 + 2*dp3 + dp4)/6
    return q_new, p_new

def symplectic_euler_step(q, p, dt):
    p_new = p - dt * k * q
    q_new = q + dt * p_new / m
    return q_new, p_new

def stormer_verlet_step(q, p, dt):
    p_half = p - 0.5 * dt * k * q
    q_new = q + dt * p_half / m
    p_new = p_half - 0.5 * dt * k * q_new
    return q_new, p_new

# --- Συνάρτηση προσομοίωσης ---
def simulate(stepper, dt, T):
    N = int(T / dt)
```

```
    q, p = q0, p0
    E = np.empty(N+1)
    E[0] = energy(q, p)
    for i in range(1, N+1):
        q, p = stepper(q, p, dt)
        E[i] = energy(q, p)
    return E

# --- Δοκιμή για διαφορετικά dt ---
dts = [0.1, 0.5, 1.0]
methods = {
    "RK4": rk4_step,
    "Symplectic Euler": symplectic_euler_step,
    "Stormer-Verlet": stormer_verlet_step
}

results = []  # λίστα για τα αποτελέσματα
E0 = energy(q0, p0)

for dt in dts:
    for name, stepper in methods.items():
        E = simulate(stepper, dt, T)
        rel_err = (E - E0) / E0
        max_err = np.max(np.abs(rel_err))
        results.append((name, dt, max_err))

# --- Εκτύπωση αποτελεσμάτων ---
print(f"{'Method':20s} {'dt':>5s} {'Max Rel Error':>15s}")
for name, dt, max_err in results:
    print(f"{name:20s} {dt:5.2f} {max_err:15.6e}")

# --- Γράφημα ---
plt.figure(figsize=(8,5))
for name in methods.keys():
    dt_vals = [dt for m, dt, e in results if m == name]
    err_vals = [e for m, dt, e in results if m == name]
    plt.plot(dt_vals, err_vals, marker="o", label=name)

plt.xlabel("dt")
plt.ylabel("Μέγιστο σχετικό σφάλμα ενέργειας")
plt.title("Σύγκριση μεθόδων ως προς το dt")
plt.yscale("log")
plt.legend()
plt.show()
```

Το output που προκύπτει είναι το σχήμα 18 και ο πίνακας:

Method	dt	Max Rel Error

RK4	0.10	2.773921e-04
Symplectic Euler	0.10	5.263158e-02
Stormer-Verlet	0.10	2.500000e-03
RK4	0.50	5.687284e-01
Symplectic Euler	0.50	3.333333e-01
Stormer-Verlet	0.50	6.249999e-02
RK4	1.00	1.000000e+00
Symplectic Euler	1.00	1.000000e+00
Stormer-Verlet	1.00	1.875000e-01



Σχήμα 18

Βιβλιογραφία

https://www.physics.uoguelph.ca/chapter-3-hamiltonian-mechanics

https://ikee.lib.auth.gr/record/8356/files/gri-2004-360.pdf

http://users.uoa.gr/~pjioannou/mech2/NOTES/liouv.pdf

https://math.uchicago.edu/~may/REU2015/REUPapers/Spiegel.pdf
https://astro.pas.rochester.edu/~aquillen/phy411/lecture7.pdf

V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., Springer, 1989.

H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed., Addison Wesley, 2002.

E. Noether, "Invariante Variationsprobleme," *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 235–257, 1918.

B. van der Pol, "On Relaxation-Oscillations," *Philosophical Magazine*, vol. 2, no. 11, pp. 978–992, 1926

A. M. Lyapunov, *The General Problem of the Stability of Motion*, Taylor & Francis, 1992 (ανατύπωση από 1892).

Σ. Χατζηθεοδωρίδης, *Εισαγωγή στη Μηχανική και Δυναμικά Συστήματα*, Εκδόσεις Ζήτη, 2009.

Ε. Τσιμίνας, *Μαθηματικά Μοντέλα και Δυναμικά Συστήματα*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2016.

Κ. Δ. Τσολάκης, *Μαθηματική Ανάλυση και Διαφορικές Εξισώσεις*, Εκδόσεις Ζήτη, 2008.

Α. Σταματόπουλος, *Αριθμητική Ανάλυση: Μέθοδοι και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2014.

Παράρτημα

Για κάθε μηχανικό σύστημα που υπόκειται σε ολόνομους δεσμούς και υφίσταται την επίδραση συνητρητικών δυνάμεων, μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση Lagrange : L=T-V

Για την οποία ισχύει η αρχή του Hamilton, σύμφωνα με την οποία η τροχιά που θα ακολουθήσει το σύστημα κατά τη μετάβαση από ένα σημείο σ' ένα άλλο, είναι εκείνη για την οποία η δ- μεταβολή του ολοκληρώματος της δράσης είναι μηδέν,

δJ =0.

Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα του Euler, οι λύσεις του συστήματος (τροχιές) προκύπτουν από τη λύση των εξισώσεων Lagrange:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ με $L=L(q, \dot{q}, t)$, $q=q_i$, $\dot{q}=\dot{q}_i$ και i=1,2,..n

Με χρήση του ορισμού των γενικευμένων ορμών και τον μετασχηματισμό του Legendre, ορίζουμε τη συνάρτηση του Hamilton:

$H=\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i$ -L με $H=H(q_i, p_i, t)$ και i=1,2,..n

έτσι προκύπτει το σύστημα των κανονικών εξισώσεων του Hamilton:

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ και $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$